

## **Modelación dinámica de los molinos de caña de azúcar.**

## **Dynamic modeling of sugar cane mills.**

**Dr. Jorge Laureano Moya Rodríguez \***, **Dr. José Alberto Velázquez Pérez\*\***, **Dr. Rafael Goytisol Espinosa \*\*\***, **Dr. Angel Silvio Machado Rodríguez \***

**\* Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas. Cuba.**

**\*\* Facultad de Ingeniería Mecánica-Eléctrica, Universidad Veracruzana. México**

**\*\*\* Facultad de Ingeniería Mecánica, Universidad “Carlos Rafael Rodríguez” de Cienfuegos. Cuba**

### **Resumen:**

En el proceso de molienda de la caña de azúcar se desarrollan elevadas cargas dinámicas durante el funcionamiento del molino. Estas cargas se deben a los altos torques y a las grandes masas y momentos de inercia que están presentes en el movimiento del molino, así como a la variación de la distancia entre centros durante el funcionamiento. Esta variación unida a errores de fabricación, errores en el paso, etc., de los engranajes que mueven el molino, provoca que durante el engranamiento las condiciones del contacto no sean las mejores, pudiendo ocurrir golpes en los dientes. Estos golpes contribuyen a acelerar el deterioro de los dientes y a incrementar las cargas dinámicas sobre el molino. Determinar las cargas dinámicas durante el funcionamiento del molino es prácticamente imposible, por lo que se hace necesario acudir a la modelación para poder predecir el comportamiento dinámico de los molinos de caña de azúcar. En el presente trabajo se desarrolla un modelo dinámico del molino que permite evaluar el incremento de carga dinámica debido a la pérdida de contacto entre los dientes de las coronas.

**Palabras clave:** Engranajes, dinámica, molinos

**Abstract:**

During sugar cane milling process high dynamic loads appear. These loads are produced by the high torques and the great masses and moments of inertia of the mill movement parts, as well as to the variation of the distance among gear centers during operation. This variation together with errors of manufacture, step errors, etc., of the gears that drive the mill, causes that during gearing the conditions of the contact are not the best ones, being able to happen shocks in the teeth. These shocks contribute to accelerate the deterioration of the teeth and to increase dynamic loads on the mills. The determination of the dynamic loads during mill operation is practically impossible, reason why becomes necessary to use the dynamic modeling for predicting the dynamic behavior of sugar cane mills. In the present paper a dynamic model of the mill is developed. This model allows to evaluate the increase of dynamic load due to the loss of contact between the teeth of the crowns.

**Key words:** Gears, dynamic, mills

**Introducción:**

En el trabajo del molino se pueden distinguir dos etapas diferentes desde el punto de vista evaluativo y cualitativo en cuanto a la dinámica se refiere. Una primera etapa en que comienza el movimiento y que se denomina etapa de “Arranque” y una segunda etapa en que ya el molino está funcionando normalmente, y que se denomina etapa del “Movimiento establecido”. El análisis de las cargas dinámicas sobre los dientes de las coronas para las dos etapas del movimiento del molino cuando se violan las condiciones del contacto ininterrumpido de los dientes es muy necesario producto de que las cargas dinámicas pueden superar en gran medida a las cargas estáticas, pudiendo provocar la falla de los dientes. Estas cargas dinámicas se producen debido a las constantes variaciones de la distancia entre centros y a errores en los parámetros geométricos de los dientes de las coronas de los molinos de caña de azúcar.

**Desarrollo**

Esquema de transmisión de la potencia al molino.

En la mayoría de las plantas productoras de azúcar la transmisión de potencia a los molinos está compuesta generalmente por un motor eléctrico o turbina, reductores, acoplamientos y finalmente las

coronas que llevan el movimiento a las mazas. Producto de los altos momentos que transmiten las coronas se producen grandes fuerzas en los dientes de las mismas, con las consecuentes deformaciones de dichos elementos, así como golpes durante el funcionamiento. La determinación de estas fuerzas es de vital importancia para el posterior cálculo de la resistencia de estas coronas.

En la figura 1 se muestra un esquema convencional de transmisión de potencia de un molino de caña de azúcar [6]. El mismo está formado por el motor, reductor, coronas, árboles y acoplamientos. Al árbol de la maza superior llega el movimiento, el cual se deriva hacia las otras mazas. Esta transmisión de movimiento se realiza con una distancia entre centros variable

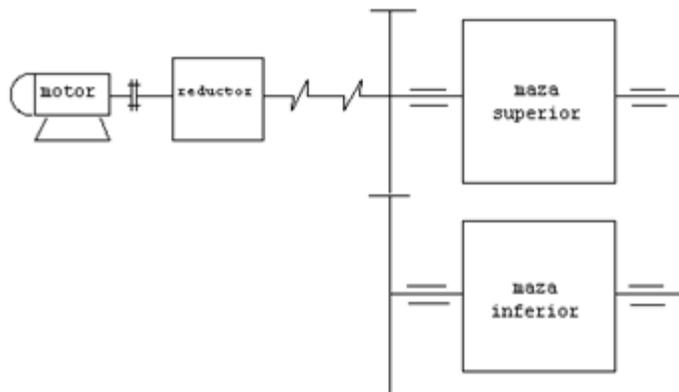


Figura 1 Esquema de transmisión de potencia a las mazas del molino (sólo se representa una de las mazas inferiores).

De la teoría de las transmisiones dentadas [1], [2], [7] se conoce que la variación de la distancia entre centros de un par de ruedas engranadas provoca un cambio en el ángulo de recubrimiento  $\alpha$ , el cual es igual al ángulo de giro de la rueda dentada desde la entrada del diente en contacto hasta su salida del contacto.

A su vez el ángulo de recubrimiento influye en el factor de recubrimiento  $\varepsilon_\alpha$ , el cual se determina por la expresión:

$$\varepsilon_\alpha = \frac{\varphi_\alpha}{\tau} \quad (1)$$

donde:  $\tau$ - paso angular de la rueda dentada, que se calcula por la expresión:

$$\tau = \frac{2 * \pi}{z}$$

Z - Número de dientes de la rueda.

Para el trabajo normal del par de dientes engranados es indispensable que se cumpla la condición del contacto permanente entre los dientes:  $a > 1$ . Con el aumento de la distancia entre centros " $a_w$ " el ángulo de recubrimiento  $\alpha$  disminuye, y por tanto disminuye el coeficiente  $\varepsilon_\alpha$ . En ocasiones durante el trabajo del molino la distancia entre centros aumenta tanto que provoca una disminución considerable del ángulo de recubrimiento  $\alpha$  de tal forma que el coeficiente de recubrimiento es menor que la unidad.  $a < 1$

(2)

Esto significa que en el momento de salida del primer par de dientes del contacto aún no ha entrado en contacto el segundo par, pudiendo ocurrir inclusive que haya una holgura Dentre los dos dientes (figura 2) [4], [11]. Cuando la maza gira, la holgura D desaparece y el segundo par de dientes entra en contacto. Sin embargo, producto de la diferencia de velocidades en el momento del contacto se producen golpes entre los dientes, los cuales se denominan golpes centrales

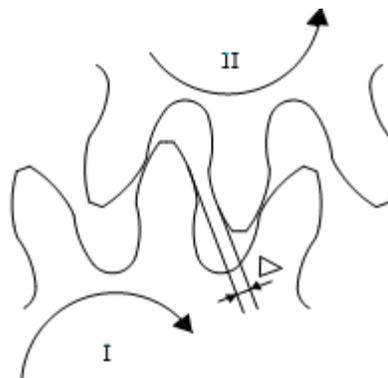


Figura 2 Holgura  $\Delta$  entre los segundos pares de dientes de la rueda I y II en el momento en que el primer par sale del contacto.

La situación anterior puede presentarse más agudamente en ruedas con errores apreciables en el paso [9], [13], como es el caso de las coronas de molinos de caña de azúcar [8], [10].

Estos golpes se repetirán durante el giro de la maza en el siguiente paso angular de la rueda dentada.

Modelo matemático para el cálculo de las fuerzas en los dientes de las coronas de molinos de caña.

De acuerdo a los principios de la semejanza dinámica [3], [5], [12], [14] se pueden llevar las dos mazas (la superior y una de las inferiores) del molino y sus transmisiones (motor, reductor, acoplamientos, ejes, coronas) a un esquema de cálculo de dos elementos (figura 3)

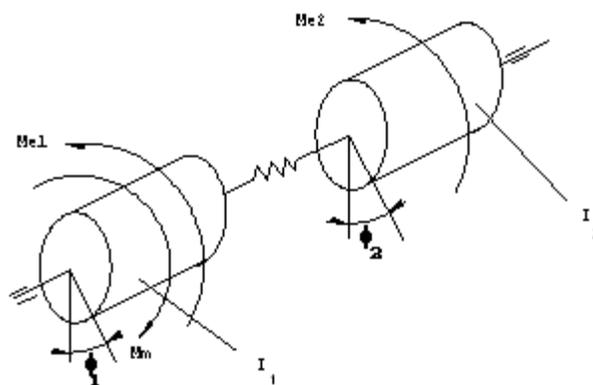


Figura. 3 Esquema de cálculo de dos elementos.

Como primer elemento del esquema de cálculo se utilizarán las partes móviles del motor y reductor, acoplamientos, árbol intermedio, y árbol de la maza superior, así como la maza superior y la corona unida al árbol de la misma. De acuerdo a las reglas de la reducción el momento de inercia  $I_1$  del primer elemento del esquema de cálculo se halla por la siguiente expresión

$$I_1 = \left( I_{mot}^* + I_{acopl1} \right) * \left( \frac{\omega_{mot}^*}{\omega_1} \right)^2 + I_{red} + 2 * I_{acopl2} + I_{arbin} + I_1 + I_{arbol1} + I_{cor1} \quad (3)$$

Donde:

$I_{mot}$  - suma de los momentos de inercia de las partes móviles del motor reducidos al árbol de la maza superior

$I_{acopl1}$  - momento de inercia del acoplamiento que une el árbol de salida del motor con el del árbol de entrada del reductor.

$\omega_{mot}$  - velocidad angular del árbol de salida del motor.

$\omega_1$  - velocidad angular de la rueda dentada (corona) unida al árbol de la maza superior.

$I_{red}$  - suma de los momentos de inercia de los elementos que giran del reductor reducidos a su árbol de salida.

$I_{acopl2}$  - momento de inercia de uno de los acoplamientos del árbol intermedio entre el reductor y la maza superior del molino referido a su eje de simetría.

$I_{arbin}$ ,  $I_1$ ,  $I_{arbol1}$ ,  $I_{corona1}$  - momentos de inercia del árbol intermedio, maza superior, árbol de la maza superior y corona de la maza superior con respecto a sus ejes de rotación.

Como segundo elemento del esquema de cálculo se toma la segunda maza, su árbol y la corona unida a este árbol. El momento de inercia de este elemento se halla:

$$I_2 = I_{II} + I_{arbolII} + I_{cor2} \quad (4)$$

Donde:

$I_{II}$ ,  $I_{arbolII}$ ,  $I_{corona2}$  son los momentos de inercia de la segunda maza, su árbol y la corona unida a este árbol.

Como momento motriz  $M_M$  (figura 3) se considera el momento transmitido por el motor a la maza superior, es decir:

$$M_M = M_{MOT} * \frac{\omega_{mot}^*}{\omega_1} \quad (5)$$

Los momentos de resistencia útil  $M_{e1}$  y  $M_{e2}$  son los momentos de las fuerzas de fricción en el apoyo de las mazas, los cuales surgen debido al tránsito del paquete de bagazo comprimido a través de la maza.

En la figura 3 por  $j_1$  y  $j_2$  se designan los ángulos de giro del primero y segundo elemento del esquema de cálculo y por  $C$  la rigidez angular del eslabón elástico que une estos elementos (representada por el elemento en forma de muelle en la figura).

Por rigidez angular del eslabón elástico se entiende la rigidez a la flexión de los pares de dientes de la primera y segunda rueda reducidos a los árboles de las mazas de los molinos la cual puede ser hallada para cualquier momento dado del contacto. (figura 4)

$$C_f = \frac{E * I_{sec}}{l \left( \frac{x_i}{l} + l_n \frac{l}{x_i} - 1 \right)} \quad (6)$$

Donde:

$E$  - módulo de elasticidad del material del diente de la rueda.

$I_{sec}$  - Momento de inercia de la sección en la base del diente.

$l$  - altura del diente

$$I_{sec} = \frac{b * h^3}{12}$$

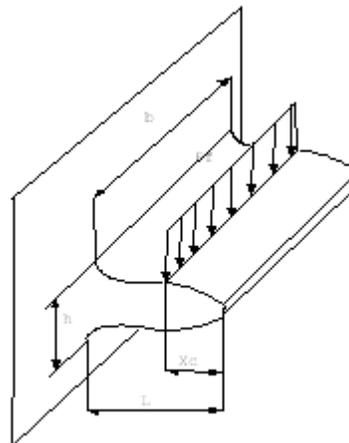


Figura.4 Esquema del diente para hallar su rigidez angular.

$b$  - longitud de la sección de la base del diente.

$h$  - anchura de la sección de la base del diente.

$x_i$  - distancia de la línea de contacto a la cabeza del diente.

$i$  - número de la rueda en la transmisión  $i = 1$  para la rueda de la maza superior e  $i = 2$  para la rueda de la maza inferior.

Ya que las ruedas de esta transmisión se fabrican siempre iguales, entonces los valores  $I_{sec}$ ,  $b$ ,  $h$  y  $l$  son iguales para ambas ruedas.

El contacto entre un par de dientes puede ser considerado como la unión entre dos elementos elásticos, por lo tanto la rigidez a flexión ( $C_f$ ) de este par será:

$$C_f = \frac{C_{f1} * C_{f2}}{C_{f1} + C_{f2}} \quad \text{o}$$

trabajando en la expresión (6)

$$C_f = \frac{E * b * h^3}{12 \left[ x_1 + x_2 + l \left( l_n \frac{l}{x_1 * x_2} - 2 \right) \right] * l^2} \quad (7)$$

A medida que se desplaza la línea de contacto de los dientes sobre sus superficies contiguas cambian los valores  $X_1$  y  $X_2$ :  $X_1$  aumenta y  $X_2$  disminuye. A causa del cambio inverso de estos valores, su suma no cambia considerablemente lo que permite obtener la rigidez a flexión media de un par de dientes por la expresión:

$$\bar{C}_f = \frac{E * b * h^3}{24 \left[ x + l * \left( l_n \frac{l}{x} - 1 \right) \right] * l^2} \quad (8)$$

Donde:  $2X$  - Valor medio de la suma  $X_1$  y  $X_2$  durante todo el engranamiento de un par de dientes.

De acuerdo a la definición de rigidez angular del eslabón elástico del esquema de cálculo, la misma puede hallarse por la siguiente dependencia.

$$C = \frac{M_t}{\Delta\varphi_t} \quad (9)$$

Donde:

$M_t = P_f * (r_a - x)$  - Momento torsor que actúa en el eslabón elástico con relación a su eje.

$\Delta\varphi_t = \frac{2 * \Delta s}{r_a - x}$  - Ángulo de giro relativo en la sección extrema de la unión elástica.

$P_f = C_f * 2 * \Delta * s$  - Fuerza actuante en el par de dientes por la línea de contacto.

$r_a$  - radio exterior de la rueda dentada.

2DS - Desplazamiento sumario del punto de contacto de ambos dientes durante el engranamiento debido a su deformación elástica. Sustituyendo en (9) las expresiones  $M_t$  y  $D_t$  se obtiene:  $C = \frac{P_f (r_a - x)^2}{2 \Delta s}$  y teniendo en cuenta el valor de  $P_f$ :

$$C = (r_a - x)^2 * \bar{C}_f \quad (10)$$

El esquema de cálculo seleccionado para el molino tiene dos grados de libertad gracias al eslabón elástico entre los elementos, es decir:  $S = 2$ .

Por tanto para determinar exactamente la posición y la velocidad de sus elementos es suficiente escoger dos coordenadas generalizadas  $q_1$  y  $q_2$ . Estas coordenadas pueden ser los ángulos de giro de los elementos, es decir:  $q_i = j_i \quad i = 1, S$ . De acuerdo a lo anterior las velocidades generalizadas serán:

$$\dot{q}_i = dj_i / dt \quad i = 1, S$$

Para establecer las ecuaciones diferenciales del movimiento de los elementos del esquema de cálculo se utilizan las ecuaciones de Lagrange de segundo grado, las cuales de acuerdo a [5] se

$$\text{escriben:} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_i} \right) - \frac{\delta T}{\delta q_i} = Q_i$$

(11)

Donde:

$T$  - energía cinética de los elementos que giran en el esquema de cálculo.

$Q$  - Fuerza generalizada ( $i = 1, S$ ).

La energía cinética de los elementos que giran se calcula por la fórmula:

$$T = \frac{I_1 \left( \frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2}{2} + \frac{I_2 \left( \frac{d\varphi_2}{dt} \right)^2}{2} \quad (12)$$

Se determinan las derivadas de la energía cinética de acuerdo a las coordenadas generalizadas velocidad y tiempo, ellas son iguales a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\delta T}{\delta q_1} = 0 \quad \frac{\delta T}{\delta q_2} = 0 \quad \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_1} = I_1 \frac{d\varphi_1}{dt} \quad \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_2} = I_2 \frac{d\varphi_2}{dt} \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_1} \right) = I_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\delta T}{\delta \dot{q}_2} \right) = I_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} \end{array} \right.$$

(13)

Sobre el primer elemento del esquema de cálculo actúan el momento motriz  $M_M$ , el momento de resistencia útil  $M_{e1}$  y el momento debido a la deformación elástica del eslabón de unión  $M_y$ , que se calcula por la expresión:

$$M_y = C * (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (14)$$

El primer momento actúa en la dirección del incremento del ángulo  $j_1$ , y los dos últimos en dirección contraria.

Supongamos que el primer elemento se giró en un ángulo  $j_1$ . Girémoslo en un ángulo elemental positivo  $dj_1$ . En este giro elemental los tres momentos mencionados ejecutan un trabajo elemental.

$$\delta A_{\delta\varphi_1} = \delta\varphi_1 (M_M - M_{e1} - M_y) \quad (15)$$

El signo “-” antes de  $M_{e1}$  y  $M_y$  significa que estos momentos tienen sentido contrario al desplazamiento  $dj_1$ , y por tanto ejercen un trabajo negativo.

De acuerdo a (11) la fuerza generalizada  $Q_1$  que corresponde a la primera coordenada  $q_1$  es igual a:

$$Q_1 = \frac{\delta A_{\delta\varphi_1}}{\delta q_1} \quad \text{teniendo en cuenta (15) y}$$

que  $dq_1 = dj_1$  se obtiene:

$$Q_1 = M_M - M_{e1} - M_y \quad (16)$$

Sustituyendo en (5.16) la expresión del momento elástico obtenemos finalmente:

$$Q_1 = M_M - M_{e1} - C * (\varphi_1 - \varphi_2) \quad (17)$$

La ecuación (17) define exactamente la primera fuerza generalizada la cual es válida solamente en la zona de movimiento del primer elemento cuando hay contacto entre los dientes. En la zona de movimiento de la rueda dentada para la cual un par de dientes sale del contacto y el siguiente par de dientes aún no ha entrado en contacto, ningún diente de la rueda se deforma, y por esto el momento de la deformación elástica del eslabón elástico entre los elementos del esquema de cálculo es nulo. Entonces para esta parte del movimiento de los elementos del esquema de cálculo la fuerza total  $Q_1$  de acuerdo a la primera coordenada

generalizada se calcula:

$$Q_1 = M_M - M_{e1} \quad (18)$$

En el segundo elemento del esquema de cálculo actúan el momento elástico  $M_y$  y el momento de resistencia útil  $M_{e2}$ . El primer momento actúa en la dirección del aumento del ángulo  $j_2$  y el último en la dirección contraria. Supongamos que el segundo elemento gira un ángulo  $j_2$  y se incrementa complementariamente un valor  $dj_2$ . Los momentos  $M_M$  y  $M_{e2}$  en este giro elemental ejecutan el siguiente trabajo elemental:

$$\delta A_{\delta\varphi_2} = \delta\varphi_2 * (M_M - M_{e2})$$

Entonces la fuerza total  $Q_2$  que corresponde a la segunda coordenada generalizada es igual a:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_2 = \frac{\delta A_{\delta\varphi_2}}{\delta\varphi_2} = M_M - M_{e2} \\ Q_2 = C * (\varphi_1 - \varphi_2) - M_{e2} \end{array} \right. \quad (19)$$

Analizando el trabajo de las transmisiones dentadas, se puede establecer que la ecuación 19 verdaderamente determina la segunda fuerza generalizada para las condiciones del contacto de uno de sus pares de dientes.

Si el contacto se rompe, entonces esta fuerza será igual a:

$$Q_2 = -M_{e2} \quad (20)$$

Trabajando con las dependencias (13), (17) a (20) el sistema de ecuaciones puede ser representado en dos formas.

- Para el caso del contacto de los dientes

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = M_M - M_{e1} - C * (\varphi_1 - \varphi_2) \\ I_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = C * (\varphi_1 - \varphi_2) - M_{e2} \end{array} \right. \quad (21)$$

- Para la ausencia del contacto entre los dientes

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = M_M - M_{e1} \\ I_2 \frac{d^2\varphi_2}{dt^2} = -M_{e2} \end{array} \right. \quad (22)$$

Este modelo matemático establecido permite determinar la ley del movimiento de los elementos y las fuerzas que se producen en los elementos elásticos exista o no holgura en los pares cinemáticos. El esquema establecido es válido para la maza superior y una de las inferiores. De considerarse las dos mazas inferiores, la solución del problema sería más sencilla, así como el esquema de cálculo. Una vez analizado el modelo matemático se pueden establecer las ecuaciones para ambas etapas de movimiento del molino.

### **Conclusiones:**

- 1.- El modelo matemático, el sistema de ecuaciones, y los programas desarrollados pueden ser utilizados para valorar la influencia de las situaciones de carga, rigidez, calidad del contacto, etc. en el aumento de las cargas dinámicas en los engranajes.
- 2.- Cuando el valor del coeficiente de recubrimiento disminuye y llega a ser inferior a la unidad se producen altas cargas dinámicas en el molino; por tanto hay que lograr para todas las aberturas del molino un valor adecuado del coeficiente de recubrimiento.
- 3.- No es aconsejable aumentar la rigidez de los dientes a no ser que se garantice el contacto ininterrumpido de los mismos.
- 4.- En los molinos accionados por motores eléctricos las cargas dinámicas son menores producto de que el valor de  $I_1$  es menor con respecto a  $I_2$  que en los molinos tradicionales accionados por máquinas de vapor.

### **Referencias bibliográficas:**

1. Airapetov E. L. "Cargas dinámicas en el contacto simultáneo de varios pares de dientes". Revista Viestnik Mashinostroenia. #8, 1991. Editorial Nauka. Moscú.
2. Buckingham E. "Manual of Gear Design. Section two .Spur and internal Gears". Editorial Industrial Press Inc. New York 2009.
3. Fong Zhang-Hua, Chiang Ta-Wei, Tsay Chieh-Wen. Mathematical model for parametric tooth profile of spur gear using line of action. Revista Mathematical and Computer Modelling. Volume 36, Issues 4-5, September 2002, Pages 603-614
4. González Pérez Ignacio. "Diseño, simulación del engrane, estudio del contacto y análisis tensional de engranajes cilíndricos rectos y helicoidales de bajo ruido y contacto mejorado".

Año: 2003. Universidad: POLITÉCNICA DE CARTAGENA [[www.upct.es](http://www.upct.es)].

5. Housner George, "Mecánica Aplicada Dinámica" Editorial Hudson Donald Continental México 1999.

6. Hugot E. "Manual para ingenieros azucareros" Compañía Editorial Continental México - 2001.

7. "Gear geometry and applied theory" Editorial Cambridge University Press, New York. USA. 2004

8. Manual de coronas de acero Fundido Caldwell Foundry & Machine Co Inc Birmingham Alabama USA 1999.

9. Markov N.N. "Influencia del error del paso durante el contacto en la suavidad de trabajo en transmisiones cilíndricas de dientes rectos. Revista Viestnik Mashinostroenia #1 1983.

10. Planos de coronas de molinos de la SKODA. FULTON y MACFARLANE.

11. Pleguezuelos González Miguel Modelo de distribución de carga en engranajes cilíndricos de perfil de evolvente. Tesis doctoral. Año: 2005. Universidad: NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA [[www.uned.es](http://www.uned.es)].

12. Shanming Luo, Yue Wu, Jian Wang. The generation principle and mathematical models of a novel cosine gear drive *Mechanism and Machine Theory, Volume 43, Issue 12, December 2008, Pages 1543-1556*

13. Shuting Li \* Effects of machining errors, assembly errors and tooth modifications on loading capacity, load-sharing ratio and transmission error of a pair of spur gears. Revista Mechanism and Machine Theory 42 (2007) 698–726. Editorial. Elsevier.

14. Shyue-Cheng Yang "Mathematical model of a stepped triple circular-arc gear Mechanism and Machine Theory xxx (2008) xxx–xxx. Mayo 2008. Editorial Elsevier