

**Título: Perfeccionamiento del Cálculo de las transmisiones por tornillo sin fin a las tensiones de contacto.**  
**Title: Improvement of worm gear design to contact stresses**

M.I. Luís Humberto Soto Berumen.  
Dr. Jorge L. Moya Rodríguez  
Dr. Ángel Machado Rodríguez  
Dr. José Alberto Velázquez Pérez.

**Resumen:** Las Transmisiones por tornillo sin fin a pesar de ser las más antiguas existentes son de las menos estudiadas en cuanto a su geometría, cinemática y diseño. Estas transmisiones pueden fallar de diversas formas, siendo las más significativas el desgaste, la picadura, la fractura y el agarramiento. Solamente existen métodos de cálculo establecidos para dos de estas fallas: la fractura y la picadura. No obstante en las expresiones que rigen estos cálculos hay imprecisiones. En el presente trabajo se analiza el procedimiento de cálculo de las tensiones de contacto que aparecen en los textos especializados y las insuficiencias de las mismas.

**Palabras claves:** Engranajes, tensiones de Contacto, Hertz

**Abstract:** Worm gear transmissions in spite of being the oldest existent are one of the fewer studied taking into account geometry, kinematics and design. These transmissions can fail in diverse ways, being the most significant: wear, scuffing, pitting, and fracture Established calculation methods only exist for two of these failures: pitting and fracture. Nevertheless in the expressions that govern these calculations there are some miss precisions. This paper analyzes the procedure for calculating contact stresses that appears in the specialized texts and the inadequacies of these expressions.

**Key words:** Worm gears, contact stresses, Hertz

**Introducción:**

La capacidad de carga y la calidad de una transmisión por tornillo sin fin dependen del comportamiento del contacto de los dientes engranados bajo carga. Los métodos actuales para analizar estos fenómenos son mayormente empíricos basados en datos de pruebas simplificadas y modelos matemáticos que asumen un contacto y una distribución de carga ideal en el diente.

Obviamente el diseño basado en esos métodos no es capaz de alcanzar la capacidad óptima de una transmisión por tornillo sin fin. El análisis de los dientes bajo carga basado en el método de los elementos finitos para determinar la distribución de carga entre los dientes, el coeficiente de recubrimiento real y las tensiones reales de contacto es el único método capaz de proporcionar un mejor diseño de estas transmisiones.

Usando este método es posible estimar más exactamente la deformación de los dientes bajo carga, las tensiones en las ruedas y la distribución de carga entre los dientes. Se ha llevado a cabo muchas investigaciones y publicaciones en estos tipos de engranajes, pero prácticamente ninguno en transmisiones por tornillo sin fin.

**Expresión para el cálculo de las tensiones de contacto.**

La gran mayoría de los textos de Elementos de Máquinas [1] [2] [3] [4] [5] [6] para determinar las tensiones de contacto parten de la expresión de Hertz, es decir:

$$\sigma = 0,418 \sqrt{\frac{q_n \cdot E_{red}}{\rho_{red}}} \quad (1)$$

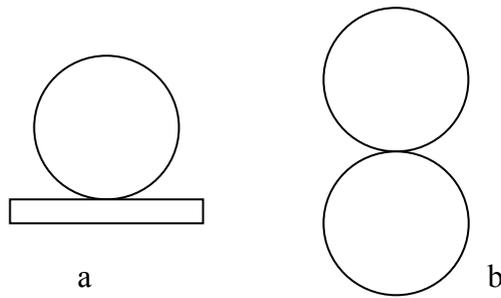
Para determinar el radio de curvatura reducido ( $\rho_{red}$ ) todos los textos señalados anteriormente parten de que el perfil del diente del tornillo sin fin es de Arquímedes, es decir recto en su sección de contacto y por tanto solamente tienen en cuenta el radio de curvatura del diente de la corona para hallar el radio reducido, es decir:

$$\rho_{red} = \rho_2 = \frac{d_{w2} \cdot \text{sen} \alpha_e}{2 \cdot \text{cos} \lambda} \quad (2)$$

Esta suposición es muy válida para el perfil de Arquímedes, pero pueden existir otras formas de perfiles.

La norma DIN 3975 [7] establece 6 formas del flanco del diente denominados ZA, ZN, ZI, ZK, ZC y ZH. Algunos de estos flancos son evolventes, otros son convexos y otros cóncavos. Por tanto la simplificación que se hace y posteriormente se generaliza para determinar las tensiones de contacto basadas en el perfil de Arquímedes puede conducir a errores en los valores calculados de estas tensiones.

Por ejemplo si los perfiles fueran evolventes se estaría en presencia del caso de Hertz de dos cilindros en contacto (Ver figura 1b)

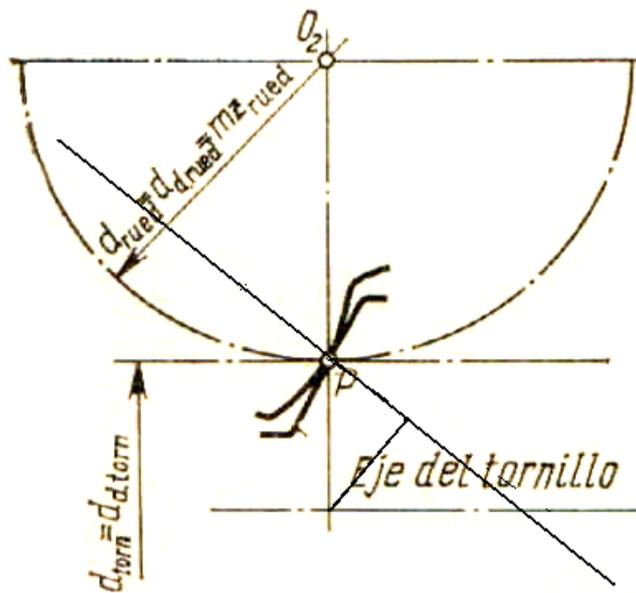


**Figura 1 Casos de Hertz para evaluar las tensiones de contacto:**  
**a – Cilindro sobre plano b – Cilindro sobre cilindro.**

Para este caso (caso b) el radio de curvatura reducido será:

$$\rho_{red} = \frac{\rho_1 \cdot \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (3)$$

$$\rho_1 = \frac{d_{w1} \operatorname{sen} \alpha_e}{2 \cdot \cos \lambda} \quad (4) \quad , \quad \rho_2 = \frac{d_{w2} \operatorname{sen} \alpha_e}{2 \cdot \cos \lambda} \quad (5)$$



**Figura 2. En torno a la determinación del radio de curvatura reducido.**

En las expresiones anteriores:

- $d_{w1}$  – diámetro primitivo del tornillo
- $d_{w2}$  – diámetro primitivo de la corona
- $\lambda$  – ángulo de hélice
- $\alpha_e$  – ángulo de engranaje.

Trabajando las expresiones 3, 4 y 5 se llega a:

$$\rho_{red_{evol}} = \frac{m}{2} Z_2 \frac{\operatorname{sen} \alpha_e}{\cos \lambda} \left( \frac{q}{q + Z_2} \right) \quad (6)$$

Si se compara esta expresión con la que aparece en los textos de diseño:

$$\rho_{red_{Arq.}} = \frac{m}{2} Z_2 \frac{\operatorname{sen} \alpha_e}{\cos \lambda} \quad (7)$$

Se puede inferir que:

$$\rho_{red_{evol}} = \rho_{red_{Arq.}} \left( \frac{1}{1 + \frac{Z_2}{q}} \right) \quad (8)$$

Por ejemplo para valores típicos de q y Z<sub>2</sub>:

$$q = 13 \text{ y } Z_2 = 80$$

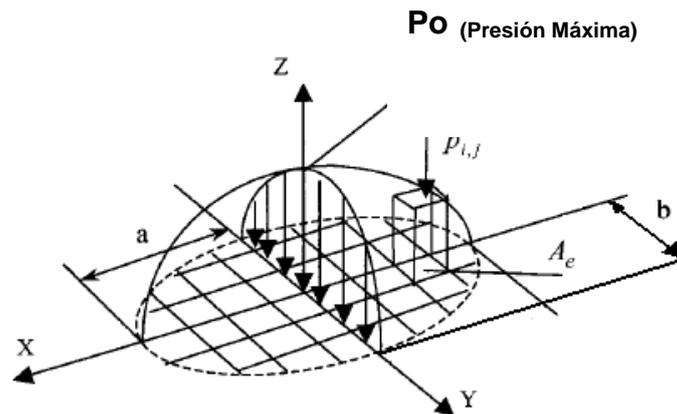
$$\rho_{red_{evol}} = 0,139 \rho_{red_{Arq.}}$$

Teniendo en cuenta la expresión 1 y para los mismos valores de q<sub>n</sub> y E<sub>red</sub> al no considerar el valor de ρ<sub>red</sub> adecuadamente, significa que los valores de tensiones tenidos en cuenta para el diseño son mucho menores que los que actúan realmente.

### **Posibilidad de determinar las tensiones de contacto en base al área de contacto.**

A través de un engorroso procedimiento analítico y a partir de las consideraciones de Hertz se pueden determinar las tensiones de contacto conociendo la huella de contacto en un instante dado.

Para material elástico e isotrópico Hertz propuso varias suposiciones a tener en cuenta para el caso general del contacto entre dos cuerpos. Demostró que la intensidad de presión entre las superficies de contacto podía ser representada por una construcción semi-elipsoide como se muestra en la figura 3.



**Figura 3. Distribución de las tensiones de contacto de Hertz.**

La presión o tensión de contacto en cualquier punto dentro del área de contacto se expresa como:

$$P_{xy} = P_o \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad (9)$$

Donde:

p<sub>o</sub> – Presión Máxima en el centro del área de contacto.

a, b – Semiejes mayor y menor de la Elipse respectivamente.

x, y – Coordenadas del punto donde se está calculando la tensión.

La carga total está dada por el volumen de la semi – elipsoide

$$P = \frac{2}{3} \pi . a . b . p_o \quad (10)$$

Por tanto, la presión máxima en términos de la carga aplicada puede expresarse de la forma siguiente:

$$p_o = \frac{3.P}{2\pi . a . b.} \quad (11)$$

### **Determinación de la Elipse de Contacto.**

Para cualquier carga de contacto P es necesario determinar el valor del eje mayor y el eje menor antes de poder evaluar las tensiones máximas de contacto. Para determinar los ejes de la elipse de contacto puede ser aplicado el siguiente procedimiento:

1. Cálculo de la deflexión de los cuerpos en contacto.

Este método consiste de tres pasos:

- Cálculo de los parámetros auxiliares
- Selección de los coeficientes de deflexión
- Determinación de las deflexiones elásticas.

### **Ecuaciones de la deflexión elástica y la elipse de contacto.**

De la Teoría de la Mecánica de Contacto [8], la expresión para la deformación elástica  $\delta$  es la siguiente:

$$\delta = C_{\delta} \frac{P}{\pi} \left( \frac{A+B}{\frac{b}{C}} \right) \quad (12)$$

Los semiejes de la elipse se pueden determinar por las siguientes ecuaciones:

$$b = C_b \sqrt[3]{P.C} \quad (13)$$

$$a = \sqrt{\frac{\delta}{A}} \quad (14)$$

La deflexión  $\delta$  expresa la suma de las deflexiones de los dos cuerpos en contacto a medida que se aproximan uno al otro. A, B y C son parámetros auxiliares usados para calcular la deflexión de los cuerpos en el punto de contacto.  $C_{\delta}$  y  $C_b$  son coeficientes.

### **Determinación de los parámetros auxiliares.**

El parámetro C es una función de las constantes elásticas E (módulo de elasticidad) y  $\nu$  (coeficiente de poisson):

$$C = \frac{1}{A+B} \left( \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \right) \quad (15)$$

A y B son parámetros relacionados con la curvatura de las superficies de contacto y se pueden calcular a través de las siguientes expresiones:

$$A = \frac{1}{4} (K_I^1 + K_{II}^1 + K_I^2 + K_{II}^2) - \frac{1}{4} \sqrt{[(K_I^1 - K_{II}^1) + (K_I^2 - K_{II}^2)]^2 - 4(K_I^1 - K_{II}^1)(K_I^2 - K_{II}^2) \sin^2 \zeta^{(12)}} \quad (16)$$

$$B = \frac{1}{4} (K_I^1 + K_{II}^1 + K_I^2 + K_{II}^2) + \frac{1}{4} \sqrt{[(K_I^1 - K_{II}^1) + (K_I^2 - K_{II}^2)]^2 - 4(K_I^1 - K_{II}^1)(K_I^2 - K_{II}^2) \sin^2 \zeta^{(12)}} \quad (16)$$

Donde  $K_i^{(i)}$  y  $K_{ii}^{(i)}$  ( $i = 1,2$ ) son las curvaturas principales de las superficies de contacto y  $\zeta^{(12)}$  es el 'ángulo formado por los vectores unitarios de las direcciones principales. Conociendo las ecuaciones de la transmisión sin fin [9] se pueden obtener las curvaturas principales de las superficies de los dientes de acuerdo al tipo de diente [7]

### **Determinación de la distribución de la presión de contacto.**

Con la ecuación de  $p_0$ , la presión en el centro de la elipse de contacto se determina cuando los semi ejes son conocidos. Entonces la presión en cualquier posición dentro de la elipse de contacto puede ser obtenida usando la ecuación de  $p_{xy}$ . Para simplificar el proceso de cálculo se puede acudir al método de los elementos finitos y dividir la elipse de contacto en un número determinado de elementos y se asume una presión promedio como se muestra en la figura 3.

La presión o tensión promedio puede calcularse como:

$$\bar{p}_{ij} = \frac{1}{A_e} \int_{y_{i-1}}^{y_i} \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_o \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy \quad (17)$$

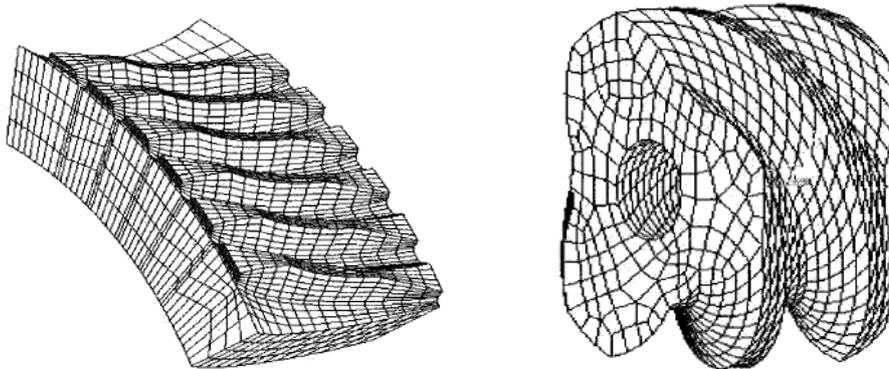
Donde los subíndices i y j representan la posición de un elemento de la elipse de contacto, y  $A_e$  es el área del elemento. Indudablemente mientras más elementos de contacto se usen en la elipse, los resultados de los cálculos serán más precisos.

#### Determinación de las Tensiones de contacto mediante el Método de los Elementos Finitos.

Como se señalaba anteriormente hasta el momento el único método válido para determinar lo más realmente posible el compartimiento de la carga, el factor de recubrimiento y las tensiones actuantes en una transmisión por tornillo sin fin es el método de los elementos finitos [10]

Para analizar las tensiones de contacto utilizando el método de los elementos finitos es necesario en primer lugar crear un modelo paramétrico tridimensional del contacto entre los dientes del tornillo y la rueda, introduciendo los correspondientes elementos "gap".

Utilizando el software Mechanical Desktop fue posible la creación de modelos de los dientes de la rueda y el tornillo, los cuales se exportaron al sistema de elementos finitos COSMOS/M. A los modelos se les creó la malla, se asignaron las propiedades del material y las condiciones de carga y frontera para determinar las tensiones de contacto y además las tensiones en el pié del diente producto de la flexión. Esto será tema de un segundo artículo.



**Figura 4. Modelo del tornillo sin fin y la corona para su análisis pro el método de los elementos finitos**

#### Conclusiones:

La mayoría de los autores de textos y artículos sobre el diseño de transmisiones por tornillo sin fin a la hora de determinar las tensiones de contacto parten de la suposición de que el perfil del diente del tornillo es de Arquímedes y generalizan la expresión matemática obtenida para otros tipos de perfiles del diente del tornillo. Esto puede traer grandes imprecisiones en los valores de estas tensiones.

A través del Método de los elementos finitos se puede precisar con bastante exactitud las tensiones actuantes en las transmisiones por tornillo sin fin y perfeccionar las expresiones matemáticas para su cálculo a resistencia.

#### Bibliografía:

1. Niemann, G. Tratado teórico práctico de Elementos de máquinas, 40 pp., Ed. Labor S.A, Barcelona,1967.
2. Dobrovolsky. V. et al. Elementos de Máquinas. Editorial MIR. Moscú 1980
3. Reshetov D. "Elementos de Máquinas". Editorial Mashinostroenie. Leningrado 1980.
4. Kudriatzev N. "Detali Mashin" . Editorial Mashinostroenie. Leningrado 1980.
5. Ivanov M. N "Detali Mashin". Editorial Mashinostroenie Leningrado -1986
6. Mott Robert L "Diseño de Elementos de Máquinas". Editora Prentice Hall, México 1992.
7. Deutsches Institut für Normung e V. DIN 3975 "Begriffe und Bestimmungsgrößen für Zylinderschneckengetriebe mit sich rechtwinklig kreuzenden Achsen". Beuth Verlag. Berlin. Germany. 2001
8. Boresi, A. P. and Sidebottom, O. M. *Advanced Mechanics of Materials*, 1985 (John Wiley, Chichester).
9. Yang, F. Numerical analysis and 3D modelling and simulation of worm gearing with localised tooth contact. PhD dissertation, The Nottingham Trent University, Nottingham, UK. **Falta fecha**
10. Litvin, F. L., Chen, J. S., Lu, J. and Handschuh, R. F. Application of finite element analysis for determination of load share, real contact ratio, precision of motion, and stress analysis. *J. Mech. Des.*, 1996, 118(4), 561-567.