

MÉTODOS DE CÁLCULO PARA ENGRANAJES PLÁSTICOS DE DIENTES RECTOS SIMÉTRICOS Y ASIMÉTRICO

Jorge L. Moya Rodríguez, José Alberto Velázquez Pérez, Rafael Goytisoló Espinosa, Edimir Betancourt Castañeda;
Facultad de Ingeniería Mecánica,
Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas

Recibido: 18/mayo/2005

Aprobado: 23/julio/2005

El comportamiento de los engranajes cilíndricos de dientes rectos de materiales plásticos es bastante diferente del de los engranajes metálicos, tanto desde el punto de vista de las fallas que se producen, como del diseño de estos engranajes. Existen diferentes métodos de cálculo para determinar las dimensiones de un engranaje plástico cilíndrico de dientes rectos exteriores para satisfacer determinados requisitos de potencia y velocidad. En este trabajo se analizan las diferentes metodologías existentes en la actualidad para el diseño de engranajes cilíndricos de dientes rectos exteriores de materiales plásticos, según diferentes autores como son Dvorak, Kelley, y Faires y además por los métodos empleados por la firma CARBOPLAST. Para comparar los resultados del cálculo de las tensiones en la base del diente por las diferentes metodologías esbozadas anteriormente se procede a calcular, en una primera fase, las características geométricas de una transmisión de engranajes cilíndricos de dientes rectos, después se comprueba si para ese caso específico se pueden usar engranajes plásticos y si la respuesta es afirmativa, entonces se calcula la tensión por cada metodología. Para el mismo ejemplo utilizando las técnicas del modelado geométrico se dibujó el piñón en 3D. Como el piñón tiene una configuración simétrica, para realizar el análisis mediante el Método de los Elementos Finitos se puede utilizar la geometría de un diente con el objetivo de simplificar los cálculos. Aplicando al modelo las correspondientes condiciones de contorno y las mismas cargas y material que se usaron en el ejemplo para valorar las diferentes metodologías, se determinaron las tensiones en todo el volumen del diente, determinándose particularmente la tensión máxima en la base del diente. Con el objetivo de comparar los resultados se determinó cuánto representa cada resultado obtenido por las diferentes metodologías con respecto al valor obtenido a través del MEF. Se ofrece además una nueva expresión de cálculo propuesta por los autores para el caso particular de los engranajes plásticos de dientes rectos asimétricos.

Palabras clave: Engranajes, plásticos, Lewis.

Calculation methods for spur gears with symmetrical and asymmetrical teeth

Plastic spur gears are employed today in many fields of industry. For mechanical engineers, plastic gears are a powerful means of cutting drive cost, weight, noise, and wear. Plastic gears also open new opportunities for smaller, more efficient transmissions in many products. The main failure of these gears is bending fracture and there are several calculation methods for avoid or diminish this failure. Bending stress evaluation in modern gear design is generally based on the more-than-one hundred- year-old Lewis equation with different modifications. A comparison among today's calculation methods is made at this paper. A new Method base on Finite Element Method is proposed.

Key words: Gears, plastics, Lewis.

INTRODUCCIÓN

El comportamiento de los engranajes cilíndricos de dientes rectos de materiales plásticos es bastante diferente al del de los engranajes metálicos, tanto desde el punto de vista de las fallas que se producen, como de su diseño.

Existen varios métodos de cálculo para determinar las dimensiones de un engranaje plástico cilíndrico de dientes rectos exteriores para satisfacer determinados requisitos de potencia y velocidad. A continuación se esbozan las metodologías según algunos autores, estos son Dvorak,² Kelley⁴ y Faires³ y, además, por los métodos empleados por la firma CARBOPLAST.⁶ Se hace una comparación entre los diferentes métodos y se ofrece un método de cálculo para engranajes plásticos de dientes rectos asimétricos.

DESARROLLO

Diferentes Métodos de Cálculo

- Método de cálculo según Dvorak

Dvorak presenta una ecuación que no es más que una modificación de la ecuación de Lewis e incorpora la velocidad en la circunferencia de paso y el factor de servicio.

$$S = \frac{55(6+V)WPC_s}{FVY} \leq [S_s] \tag{1}$$

donde:

- S: Tensión actuante en la base del diente en lb/pulg²
- W: Potencia en HP
- V: Velocidad del polo en pie/min.
- P: Diametral pitch
- C_s: Factor de servicio, según la tabla 1
- F: Ancho del diente en pulgadas
- Y: Factor de forma o factor de Lewis, según la tabla 2
- [S_s]: Tensión admisible en lb/pulg², según la tabla 3

Tabla 1. Factores de servicio

Tipo de carga	8-10 h/día	24 h/día	Intermitente (3 h/día)	Ocasional (0,5 h/día)
Constante	1	1,25	0,80	0,50
Choques ligeros	1,25	1,50	1	0,80
Choques medios	1,50	1,75	1,25	1
Choques fuertes	1,75	2	1,50	1,25

Método de cálculo según Kelley

Kelley emplea, para el cálculo de tensiones en engranajes, la ecuación de Lewis en su variante original.

$$\sigma = \frac{FP}{fY} \leq [\sigma] \tag{2}$$

donde:

- s: Tensión actuante en el pie del diente, en lb/pulg²
- [s]: Tensión admisible del material, en lb/pulg²
- P: Diametral pitch
- f: Ancho del diente, en pulg
- F: Fuerza tangencial transmitida, en libras
- Y: Factor de forma del diente, según tabla 2

Tabla 2. Factor de forma

Número de dientes	Dientes de involuta de 20°	Dientes de Involuta de 20° cortos
12	0,245	0,311
14	0,276	0,339
16	0,295	0,361
18	0,308	0,377
20	0,320	0,393
22	0,330	0,405
26	0,346	0,424
30	0,358	0,437
34	0,371	0,446
38	0,383	0,456
43	0,396	0,462
50	0,408	0,474

Tabla 3. Valores de las tensiones admisibles para engranajes plásticos a 70 °F en lb/pulg²

Plástico	Normal	Reforzado con fibra de vidrio
ABS	3 000	6 000
Acetato	5 000	7 000
Nylon	6 000	12 000
Policarbonato	6 000	9 000
Poliéster	3 500	8 000
Poliuretano	2 500	-

Método de cálculo según Faires

Este método contempla los cálculos siguientes:

$$kg = \left(\frac{s^2 \cdot \text{sen}(\phi)}{1,4} \right) \left(\frac{1}{E_p} \cdot \frac{1}{E_g} \right) \quad (7)$$

Primeramente se calcula la carga dinámica a través de la expresión siguiente:

$$F_d = \frac{(200 + 3,28V)F_t}{200 + 0,82V} \quad (3)$$

donde:

Fd: Carga dinámica, en kg.

V: Velocidad del polo del engranaje, en m/min.

Ft: Fuerza tangencial actuante sobre el diente, en kg.

Esta carga dinámica posteriormente se iguala a la carga actuante según la ecuación de Lewis, es decir, Fd = Fs.

$$F_s = \frac{SbYm}{10} \quad (4)$$

donde:

S: Esfuerzo de cálculo en kg/cm² que depende del módulo, del material y del número de ciclos.

b: Ancho de la rueda, en cm.

m: Módulo, en mm.

Y: Factor de Lewis.

Se asume un valor del módulo y se puede despejar el ancho de cara "b" necesario para transmitir la potencia dada.

Finalmente, se iguala la carga dinámica a la carga de desgaste y se despeja el ancho necesario.

$$F_d = F_w$$

$$F_w = D_p \cdot b \cdot Q \cdot kg \quad (5)$$

$$Q = \frac{2 \cdot D_g}{D_g + D_p} \quad (6)$$

Donde:

Dg: Diámetro primitivo de la rueda, cm

Dp: Diámetro primitivo del piñón, cm

b: Ancho de los dientes, cm

kg: Factor del material

donde:

s: tensión admisible a contacto, en kg/cm².

φ: ángulo de presión.

Ep, Eg: módulo de elasticidad en kg/cm² del piñón y la rueda, respectivamente.

De los anchos de cara obtenidos por la ecuación de Lewis y por la ecuación del desgaste se toma el mayor.

Método de cálculo según CARBOPLAST

Para obtener el ciclo de vida de un piñón fabricado en PROLON, se calcula el esfuerzo básico admisible en la raíz del diente usando para ello una modificación de la fórmula de Lewis.

Después se fija el valor calculado en el eje vertical, se lee su proyección en el eje horizontal de acuerdo al módulo específico del piñón y se determina el ciclo de vida en función de los esfuerzos, los cuales pueden convertirse, de acuerdo a la velocidad, en tiempo de vida esperada.

Si el torque a transmitir es el factor que se conoce,

$$S = \frac{200000 \cdot T}{PD \cdot M \cdot F \cdot Y} \cdot C_1 \cdot C_2 \quad (8)$$

Y si la potencia es el factor conocido, entonces se calculará por:

$$S = \frac{145000000 \cdot HP}{PD \cdot M \cdot F \cdot Y \cdot n} \cdot C_1 \cdot C_2 \quad (9)$$

donde:

S: Esfuerzo admisible en el diente, en kgf/cm²

T: Torque transmitido por el piñón en, kgf/cm²

PD: Diámetro primitivo del piñón, en mm

M: Módulo de la transmisión, en mm

F: Ancho de la cara del diente en mm

Y: Factor de forma del diente

C: Factor de corrección de operación

C₂: Factor de corrección de temperatura

HP: Potencia transmitida por el piñón en HP

n: Velocidad del piñón en rpm

$$M_2 = 9550 \cdot \frac{N_2}{n_2}$$

Los diferentes parámetros que intervienen en la fórmula anterior son estimados y calculados por diferentes gráficos y tablas que ofrece la firma CARBOPLAST.⁶

Sustituyendo valores en M_2 :

$$M_2 = 214,64N - m$$

Validación de los métodos a través de un ejemplo de cálculo de una transmisión por engranajes de plásticos sin corrección

Y por consiguiente:

$$F_t = 1073,03N$$

Con la intención de comparar los resultados del cálculo de tensión en la base del diente por las diferentes metodologías esbozadas anteriormente se procede a calcular, en una primera fase, las características geométricas de una transmisión de engranajes cilíndricos de dientes rectos, después se comprueba si para ese caso específico se pueden usar engranajes plásticos y si es afirmativo, entonces, por último, se calcula la tensión por cada metodología.

Comprobación de la posibilidad de utilización de engranajes de plástico en esta transmisión (5):

(10)

donde:

D: Diámetro del engranaje, en pulgadas

F: Ancho del diente, en pulgadas

n: Velocidad de la rueda, en rpm

H: Potencia transmitida, en HP

Z: Número de dientes de engranaje

Como datos auxiliares e hipotéticos se asume una transmisión por engranajes con las características

siguientes:
 $X = (D^2 \cdot F \cdot n) \cdot \frac{1}{W} \cdot \frac{H \cdot Z}{115}$
 $W = 5 \text{ kW}$

ha* = 1

b = 25,4 mm

n1 = 890 rpm

c = 0,16

m = 4

μc = 20 °

aw = 100 mm

Zp = 25

Zc = 100

Si X es:

1 ó mayor: se recomienda el uso del plásticos, específicamente de la firma Nylamid.

0,722 a 1: el engranaje plástico funciona adecuadamente.

0,445 a 0,721: el engranaje tiene pocas propiedades para funcionar adecuadamente.

Menos de 0,445: no debe usarse el plástico para reemplazar el metal.

Con esos datos se calcularon todos los parámetros geométricos de la transmisión.

Partiendo de los datos iniciales y del cálculo geométrico:

D = 3,94 pulg.

H = 6,71 HP

F = 1 pulg.

Z = 25

n = 890 rpm

Análisis de la posibilidad del uso de engranajes plásticos para la transmisión

Sustituyendo en (10): $X = 3,107.25$

Una vez realizado el cálculo geométrico se comprueba si en la transmisión pueden usarse engranajes plásticos.

Por lo tanto, como el resultado es mucho mayor que la unidad se pueden utilizar engranajes de plástico en esta transmisión.

Cálculo de la fuerza tangencial

Se calcularon entonces las tensiones por todos los métodos descritos anteriormente.

$$F_t = \frac{2000 \cdot M_2}{d_2}$$

Cálculo de las tensiones mediante el MEF

Para los mismos datos usados en los métodos anteriores se realizaron los cálculos de tensiones a través del Método de los elementos finitos. Para ello se creó un modelo del diente, se generó la malla y se usó como material nylon 6/10.¹

Una vez que existen todas las condiciones se pueden apreciar los resultados del comportamiento de las tensiones en todo el volumen del diente (figura 1).

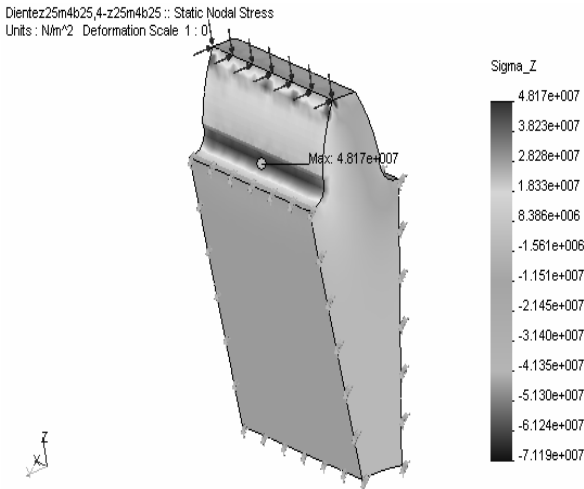


Figura 1. Resultado del cálculo de tensiones por el método de los elementos finitos

En la figura 2 aparece un detalle de una zona de la base del diente (detalle I), que según se observa es la más cargada. El resultado de esta tensión, la máxima en la base del diente, es aproximadamente 48,17 Mpa.

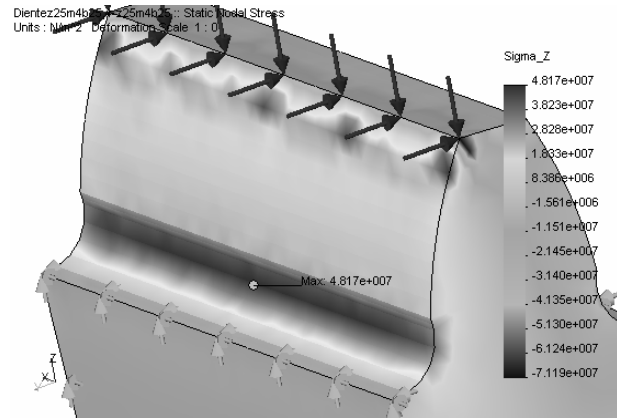


Figura 2. Detalle de la zona I

Comparación entre los resultados del MEF y los diferentes métodos

Con el objetivo de comparar los resultados se determina cuánto representa cada resultado obtenido por cada procedimiento, con respecto al valor obtenido a través del MEF (tabla 4).

Tabla 4. Resumen de resultados con respecto al MEF

	Métodos					
	Dvorak	Kelley	Faires	Moya	Carboplast	MEF
Resultados (MPa)	47,45	30,88	48,41	46,32	34,89	48,17
% de Diferencia	1,5	133,3	0,49	3,84	29,19	0

Expresión de cálculo para los engranajes plásticos asimétricos propuesta por los autores

Para hallar una expresión más exacta para el cálculo de tensiones en dientes asimétricos se desarrolló un experimento virtual, utilizando el software *COSMOS Design Star*. Para ello se desarrollaron tres etapas:

- 1) Se mantuvo el número de dientes fijo ($Z = 17$), la corrección igual a cero ($X = 0$), y se varió el coeficiente de asimetría desde 1 hasta 1,5. Se utilizó como material nylon 6,10 y se utilizó una fuerza unitaria, un módulo unitario y una carga unitaria. Se determinaron entonces las tensiones máximas en el pie del diente. Utilizando el software *Curve Expert 1,3* para

Windows, se determinó la ecuación de la Tensión en función del coeficiente de asimetría (*Weibull Model*):

(11)

Aquí

a= 6,747125

b= 3,862122

c= 1,219807

d= -3,85999

C – Coeficiente de asimetría

2) Posteriormente se mantuvo el número de dientes fijo ($Z = 17$), el coeficiente de asimetría igual a 1 y se varió la corrección desde 0 hasta 1. Se utilizó como material nylon 6,10 y se utilizó una fuerza unitaria, un módulo unitario y una carga unitaria. Se determinaron entonces las tensiones máximas en el pie del diente. Utilizando el software *Curve Expert 1,3* para Windows, se determinó la ecuación de la tensión en función del coeficiente de corrección (*Exponential Fit*):

3) $\sigma = a \cdot e^{b \cdot x}$ (12)

$$\sigma = a \cdot -b \cdot e^{-c \cdot C^d}$$

Aquí:

a = 5,6219788

b = -0,4456412

X = coeficiente de corrección

4) Finalmente, se mantuvo el coeficiente de asimetría igual a 1 la corrección igual a cero, y se varió el número de dientes. Se utilizó como material Nylon 6,10 y se utilizó una fuerza unitaria, un módulo unitario y una carga unitaria. Se determinaron entonces las tensiones máximas en el pie del diente.

Utilizando el software *Curve Expert 1,3* para Windows, se determinó la ecuación de la tensión en función del número de dientes (*Logistic Model*).

$$\sigma = \frac{a}{(1 + b \cdot e^{-c \cdot z})} \quad (13)$$

Aquí:

a = 1,3476586

b = -0,65875851

c = 0,0088964867

z = número de dientes

Para evaluar la influencia simultánea de los tres parámetros (X, C, Z), en el valor de las tensiones que surgen en el pie del diente, se utilizó el software *Stat Graphics 4,1 Plus*, realizándose un mayor número de experimentos. Llegándose a la siguiente función (para fuerzas, módulo y ancho unitarios):

$$\sigma_u = 1,33615 - \frac{0,452994}{1 - 0,05 * e^{0,0386 * Z}} - 3,12642 * C^{\frac{0,662}{C}} + 4,3 * e^{-0,14282 * X} \quad (14)$$

Entonces, el valor de la tensión real en el diente de un engranaje asimétrico será el valor calculado por la expresión anterior, afectado por la carga

actuante, el módulo, el ancho de la rueda, y el factor de Lewis. Llamando a la expresión anterior Cr, se obtiene:

$$\sigma = \frac{Ft}{m \cdot b \cdot Y_F} * Cr \quad (15)$$

$$C_r = 1,33615 - \frac{0,452994}{1 - 0,05 * e^{0,0386 * Z}} - 3,12642 * C^{\frac{0,662}{C}} + 4,3 * e^{-0,14282 * X} \quad (16)$$

Se programaron todos los parámetros anteriores en una hoja de cálculo de *Excel*, y para validar la

expresión se desarrollaron siete cálculos con el *COSMOS Design Star*. En la tabla 5 se muestra

la hoja de cálculo en *Excel*: en esta se puede apreciar el error de la expresión obtenida con respecto al Método de los Elementos Finitos.

Tabla 5. Valores de las tensiones calculadas por la expresión obtenida y por el MEF

Ancho	Z	Fn (N)	Valores de las Tensiones calculadas teóricamente y por el MEF										% error
			Ft	Fr	C	Yf	X	Cr	Tensiones en Mpa				
									Lewis	Ecuación	MEF		
20	17	100	93,97	34,2	1	0,302	1	1,438	7,779	11,184	11,32	-1,200	
50	20	500	469,8	171	1,2	0,392	0,5	1,375	4,794	6,594	6,75	-2,306	
20	17	100	93,97	34,2	1	0,302	0	2,008	3,889	7,812	7,8	0,149	
70	30	400	375,9	136,8	1,3	0,429	0,8	1,050	2,503	2,628	2,78	-5,458	
80	40	500	469,8	171	1,5	0,466	0,25	1,156	2,101	2,427	2,34	3,731	
60	50	600	563,8	205,2	1,2	0,438	0,3	1,309	2,682	3,511	3,36	4,501	
40	60	700	657,8	239,4	1	0,389	0,6	1,244	4,227	5,257	4,98	5,564	

CONCLUSIONES

1. Muchos autores coinciden en el criterio de que la falla principal de los engranajes plásticos es la fractura del diente. De hecho todas las expresiones de cálculo que aparecen en la literatura para el diseño de este tipo de engranajes se limitan a determinar las tensiones que se originan en el pie del diente debido a la flexión.
2. Existe una gran diferencia entre los valores de las tensiones en el pie del diente producto de la flexión al aplicar las expresiones propuestas por los diferentes autores. Las expresiones más exactas son las de Dvorak y Faires y las menos precisas las de Nelly y las de la firma CARBOPLAST.
3. Las diferentes expresiones de cálculo existentes para determinar las dimensiones de los engranajes plásticos en función de la sollicitación de potencia no tienen en cuenta las posibilidades de modificaciones geométricas de estos engranajes, ni las particularidades del factor de Lewis para estos, el cual en los engranajes asimétricos depende además del número de dientes del ángulo de ataque y del ángulo de respaldo.
4. La expresión de cálculo propuesta por los autores para la determinación de las tensiones en el pie del diente de los engranajes asimé-

tricos ofrece resultados bastante cercanos a los obtenidos por el MEF.

BIBLIOGRAFIA

1. DSM: *Engineering Plastic Products*, Catálogo, 1999.
2. Dvorak, P.: "More bite for Plastic Gears", *Machine Design*, enero, Penton Publishing, USA, 1988.
3. Faires, V. M.: *Diseño de elementos de máquinas*, Editorial Limusa.
4. Kelley, J. W.: "Polymers get in gears", *Machine Design*, septiembre, Penton Publishing, USA, 1998.
5. Kelley, J. W.: "Polymers get in gears", *Machine Design*, septiembre, Penton Publishing, USA, 1977.
6. Nylamid, J.: Plásticos de ingeniería Consultado en: <http://www.nylamid.com.mx/>
7. Pertuz, F. D.: Plásticos de ingeniería, CARBOPLAST. S, A., Colombia, 1999.