

Artículo Original

**INFLUENCIA DE LA MASA, LA RIGIDEZ Y EL
AMORTIGUAMIENTO EN LA DINÁMICA DE AMORTIGUADORES
DE MASA SINTONIZADOS**

**INFLUENCE OF MASS, STIFFNESS, AND DAMPING ON THE DYNAMICS OF
TUNED MASS DAMPERS**

César A. Chagoyen Méndez ^{1*} <https://orcid.org/0000-0002-9377-3234>
Giovanny Medina Castellón ¹ <https://orcid.org/0009-0000-4542-5350>
Yamill S. Campos Pérez ² <https://orcid.org/0000-0002-1587-8399>
Ernesto L. Chagoyen Méndez ² <https://orcid.org/0000-0003-4038-6481>
Ángel S. Machado Rodríguez ¹ <https://orcid.org/0000-0002-7774-8653>
Gilberto García del Pino ³ <https://orcid.org/0000-0003-0754-2390>

¹ Departamento de Ingeniería Mecánica, Facultad de Ingeniería Mecánica e Industrial.
Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Santa Clara, Villa Clara, Cuba.

² Departamento de Ingeniería Civil, Facultad de Construcciones.
Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Santa Clara, Villa Clara, Cuba.

³ Coordenação de Engenharia Mecânica. Escola Superior Tecnológica.
Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, Estado do Amazonas, Brasil.

Recibido: Junio 26, 2023; Revisado: Julio 11, 2023; Aceptado: Agosto 11, 2023

RESUMEN

Introducción:

La reducción de las vibraciones en estructuras longevas y carentes de mantenimiento como los puentes de ferrocarril en Cuba, es un tema que actualmente va cobrando importancia. Una vía para lograrlo es la colocación de Amortiguadores de Masa Sintonizados.

Objetivo:

Determinar la influencia de la masa, la rigidez y el amortiguamiento en la amplificación dinámica de la estructura.

Materiales y Métodos:

Se realiza un estudio dinámico del puente ferroviario ubicado en el km 560 del Ferrocarril Central y del Amortiguador de Masa Sintonizado para el control de las vibraciones. Se ajusta el problema real al modelo matemático de sistemas de uno y dos grados de libertad.



Este es un artículo de acceso abierto bajo una Licencia *Creative Commons* Atribución-No Comercial 4.0 Internacional, lo que permite copiar, distribuir, exhibir y representar la obra y hacer obras derivadas para fines no comerciales.

* Autor para la correspondencia: César A. Chagoyen, Email: cachagoyen@uclv.edu.cu



Resultados y Discusión:

Se determina la influencia de los parámetros básicos (masa, rigidez y amortiguamiento) en la amplificación dinámica de la estructura, los desplazamientos de cada grado de libertad y la amplitud de las oscilaciones del puente y del Amortiguador de Masa Sintonizado como respuesta a la fuerza de excitación.

Conclusiones:

Se obtiene la influencia de la masa, la rigidez y el amortiguamiento en la respuesta dinámica del sistema. Se resuelve el modelo de dos grados de libertad, variando solamente el coeficiente de amortiguamiento del Amortiguador de Masa Sintonizado y se obtienen las gráficas de posición-tiempo. En las funciones de respuesta en frecuencia, se comprueba que el sistema alcanza su mayor amplificación dinámica cuando la frecuencia de la vibración producida por una carga externa coincide con la frecuencia natural de la estructura.

Palabras clave: Amortiguador de masa sintonizado; puente de ferrocarril; vibraciones.

ABSTRACT

Introduction:

The reduction of vibrations in long-lived and unmaintained structures such as railway bridges in Cuba is an issue that is currently gaining importance. One way to achieve this is the placement of Tuned Mass Dampers.

Objective:

To determine the influence of mass, stiffness and damping on the dynamic amplification of the structure.

Materials and Methods:

A dynamic study of the railway bridge located at km 560 of the Central Railway and of the Tuned Mass Dampers was carried out to control vibrations. The real problem is fitted to the mathematical model of systems of one and two degrees of freedom.

Results and Discussion:

The influence of the basic parameters (mass, stiffness and damping) on the dynamic amplification of the structure, the displacements of each degree of freedom and the amplitude of the oscillations of the bridge and the Tuned Mass Dampers in response to the excitation force were determined.

Conclusions:

The influence of mass, stiffness and damping on the dynamic response of the system was obtained. The two degrees of freedom model is solved, varying only the damping coefficient of the Tuned Mass Dampers, the position-time graphs were obtained. In the frequency response functions, it is verified that the system reaches its highest dynamic amplification when the frequency of the vibration produced by an external load coincides with the natural frequency of the structure.

Keywords: Tuned mass damper; railway bridge; vibrations.

1. INTRODUCCIÓN

La verificación analítica y experimental de la transferencia de energía de un sistema principal excitado externamente a otro sistema secundario no excitado, acoplado al primero, dio origen a los amortiguadores de masa sintonizados, en lo adelante TMD (del inglés: *Tuned Mass Damper*). El amortiguador de masa sintonizado es una herramienta ingenieril clásica consistente en una masa, un resorte y un amortiguador viscoso colocados en el sistema vibrante principal para atenuar la vibración no deseada a una frecuencia determinada. La frecuencia natural del amortiguador se sintoniza con la frecuencia natural del sistema principal provocando que el amortiguador vibre en resonancia, disipando la energía absorbida a través de los mecanismos de amortiguamiento del TMD (Falconí, 2012). Después de su invención por Frahm en 1909 (Frahm, 1911) el concepto de amortiguadores de masa sintonizados ha atraído la atención de investigadores de diferentes campos para controlar vibraciones causadas por diferentes tipos de fuerzas.

Den Hartog demostró que, para sistemas de un grado de libertad no amortiguado, la amplitud de vibración del sistema excitado es nula cuando la frecuencia de excitación es igual a la frecuencia del TMD, indicando que toda la energía del sistema fue transferida al TMD (Den, 1956). Jones presentó un análisis aproximado de la respuesta debida al modo fundamental de una viga simple de una única luz equipada con amortiguadores sintonizados (Jones, 1967). En particular para cargas en puentes, se estudió el efecto de un TMD en el control de vibraciones en puentes bajo la acción de cargas que se mueven a lo largo de la estructura. Sintonizaron el TMD en el modo vertical dominante y lo instalaron en el medio de los puentes. Además, agregaron masas al modelo con el objetivo de simular las masas de los vehículos para así determinar la respuesta dinámica de los puentes. El autor muestra la eficiencia de los TMD en el caso de un puente con tres luces. Los desplazamientos verticales en el medio del puente fueron comparados antes y después de la instalación de los TMD (Li y Cao, 2019).

Se evaluaron vigas de Timoshenko equipadas con TMD bajo la acción de excitaciones armónicas (Chen y Huang, 2004). Los autores estudiaron la respuesta dinámica de las vigas para un determinado intervalo de frecuencias. Propusieron un modelo simplificado de dos grados de libertad y emplearon el método propuesto por Den Hartog para estudiar las características dinámicas de los TMD presentando algunas tablas de diseño para aplicaciones prácticas. Se realizó un estudio comparativo entre vigas simplemente apoyadas sin dispositivos de control, vigas con un TMD y vigas con múltiples TMD demostrando la eficiencia de los dispositivos de control (Mazzon y col., 2023).

Existe gran variedad de amortiguadores de masa sintonizados que responden a distintas solicitudes como: tipo de estructura y su geometría, cargas y modos de oscilación predominantes, materiales, etc. Los más empleados en edificios para reducir los desplazamientos producidos por el viento son los amortiguadores de masa traslacionales y los amortiguadores de masa pendulares, estos últimos empleados en edificios altos (Padrón, 2021), (Bian y col., 2022). Para el caso de los puentes, se han desarrollado amortiguadores horizontales y verticales. Estos últimos son los de mayor importancia para este trabajo (Martínez-Martínez y col., 2022), (Roobahan y Turan, 2023), (Chagoyen y col., 2021).

En los puentes el TMD se coloca en la zona con la mayor amplitud de vibración de la frecuencia natural vertical. La fijación del dispositivo a la estructura se realiza mediante tornillos o placas de fijación (Hajji, 2016), (Junfeng y col., 2022).

En este trabajo se determina la influencia de la masa, la rigidez y el amortiguamiento en la amplificación dinámica de la estructura. Se simula el problema real, donde se tiene una estructura y un amortiguador de masa sintonizado para disminuir las vibraciones, en un modelo de uno y dos grados de libertad, y mediante el software de Ingeniería Matlab, se obtiene resultados como desplazamientos y amplitud de las oscilaciones del sistema analizado.

2. MATERIALES Y MÉTODOS

2.1 Estudio dinámico del sistema formado por la estructura y el TMD

Se realiza un estudio dinámico a partir de los modelos de uno y dos grados de libertad (gdl) para analizar la influencia de la masa, la rigidez y el amortiguamiento en el comportamiento estructural del puente (gdl 1) y el TMD (gdl 2). De estos modelos se obtienen, además, varias gráficas que muestran el desplazamiento de cada grado de libertad y la amplitud de las oscilaciones de la estructura, del TMD y del sistema completo (estructura + TMD).

2.1.1. Sistema con un grado de libertad: Puente sin TMD

Para simplificar el problema real es necesario realizar un modelo de un solo grado de libertad. El esquema básico tiene la forma que se puede apreciar en la figura 1. La ecuación general que gobierna el problema descrito es la (1):

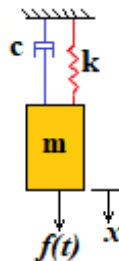


Figura 1. Modelo de un grado de libertad

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = A \sin \omega t \quad (1)$$

siendo: m la masa (t); c la amortiguación (kN-s/m); k la rigidez (kN/m); A la amplitud (m) y ω la frecuencia asociada a la fuerza (Hz).

El término derecho de la ecuación indica que el sistema está sometido a oscilaciones forzadas, si estuviera sujeto a oscilaciones libres entonces dicho término sería cero.

Otro aspecto a tener en cuenta es la solicitud de las vibraciones en la estructura. En este caso las oscilaciones que se estudian son en la dirección vertical. Es importante aclarar que la gravedad influye en la ecuación de movimiento del sistema: debido al peso propio de los cuerpos existe un pequeño desplazamiento inicial, en este trabajo no se tiene en cuenta la fuerza de gravedad ya que estas condiciones son prácticamente insignificantes, por eso todo el estudio dinámico se realiza después que el sistema se encuentra en equilibrio (Bian y col., 2022).

Para la resolución de la ecuación diferencial que describe el comportamiento de la

estructura se emplea el software Matlab. Para una mejor interpretación del cálculo es conveniente transformar la ecuación diferencial de segundo orden en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden. Se introduce para ello la variable y , que representa la velocidad:

$$\dot{y} = -\frac{k}{m} \cdot x - \frac{c}{m} \cdot y + \frac{A}{m} \cdot \text{sen } \omega_f t \quad (2)$$

Es habitual en estructuras hacer los siguientes cambios de variable:

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 - \text{siendo } \omega_0 \text{ la frecuencia natural de la estructura.}$$

$$\frac{c}{m} = 2\xi \omega_0 - \text{siendo } \xi \text{ la relación de amortiguación de la estructura.}$$

El sistema de ecuaciones queda, por tanto:

$$\dot{y} = -\omega_0^2 x - 2\xi \omega_0^2 + \frac{A}{m} \text{sen} \omega_f t \quad (3)$$

Para desarrollar el código se necesita además del sistema de ecuaciones descrito, un vector que contenga el intervalo de tiempo de integración y otro vector con las condiciones iniciales. El vector de tiempo contiene los valores inicial y final del intervalo, y el vector de condiciones iniciales contiene la posición y velocidad iniciales. Con el fin de minimizar el error numérico, el intervalo de integración será entre 0 y T, siendo T el periodo asociado a la fuerza que actúa sobre el sistema.

A partir de lo anterior se obtienen resultados importantes para la comprensión del comportamiento del puente sin TMD y su interpretación en relación con el problema real. Con esta metodología se pueden obtener gráficas como las de respuesta en frecuencia variando parámetros como la masa, la rigidez y el amortiguamiento (Hajji, 2016).

La variable que se usa como dato es ξ (relación de amortiguación), pero para la resolución numérica se utiliza el valor de c (amortiguación), que se obtiene despejando de la definición antes realizada.

2.1.2. Sistema de dos grados de libertad: Puente con TMD

Se desarrolla el modelo matemático de dos grados de libertad el cual se acerca aún más al sistema real, donde se tiene la estructura con sus características dinámicas y el amortiguador de masa sintonizado que se le incorporará para reducir la amplitud de sus oscilaciones. El tratamiento de este problema es similar al de un grado de libertad como se puede observar en la figura 2, pero con ciertas consideraciones. En las ecuaciones que gobiernan este problema, existe cierto acoplamiento entre los términos de masa, amortiguamiento y rigidez.

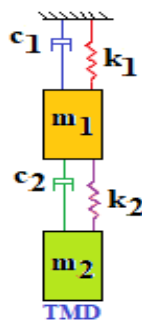


Figura 2. Modelo de dos grados de libertad

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix} \quad (4)$$

Escrito en forma matricial queda:

$$M\ddot{x}_i + C\dot{x}_i + Kx_i = f_i(t) \quad (5)$$

donde M , C y K son las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente. Y $f_i(t)$ el vector de fuerzas. Este vector, dado que este trabajo tiene como fin el estudio del TMD, se puede simplificar teniendo en cuenta que no actúa ninguna fuerza directamente sobre el segundo grado de libertad ($f_2(t)=0$).

En este caso se pasa del sistema de dos ecuaciones de segundo orden a un sistema de cuatro ecuaciones de primer orden, despejando las variables correspondientes de la siguiente manera:

$$\dot{y}_1 = [f_1(t) - (c_1 + c_2)y_1 - c_2y_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2] \frac{1}{m_1} \quad (6)$$

$$\dot{y}_2 = [-c_2(y_2 - y_1) - k_2(x_2 - x_1)] \frac{1}{m_2} \quad (7)$$

2.2. Caso de Estudio

El caso de estudio consiste en un puente ferroviario ubicado en el km 560 del Ferrocarril Central de Cuba. El mismo presenta cuatro luces de 20 m cada una (figura 3). Una de estas luces tiene una masa $m=95$ t y una rigidez $k=50'000$ kN/m. El coeficiente de amortiguamiento que se utilizó en este trabajo fue de $\xi=0,025$, por ser el valor más utilizado en la literatura (Duménigo, 2018). La excitación del puente se consiguió al hacer pasar una locomotora por encima de este en ambas direcciones a velocidades variables. Como unidad de la masa se empleará la tonelada métrica (t) que es aceptada para su uso con unidades del Sistema Internacional y que habitualmente se emplea en esta propiedad de los puentes.



Figura 3. Puente km 560 del Ferrocarril Central

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

3.1 Sistema de un grado de libertad

3.1.1. Influencia de la masa

Si se ejecuta el código para distintos valores de la masa se puede apreciar la influencia de la misma. La masa será la única variable, manteniendo constante todos los demás parámetros del problema, resumidos en la tabla 1.

Tabla 1. Parámetros para el análisis de la influencia de la masa

ξ	k (kN/m)	A (kN)	w_f (Hz)
0,025	50'000	20	20

La función de respuesta en frecuencia para distintos valores de la masa aparece en la figura 4. Mientras que en la tabla 2, se recogen los resultados de la gráfica anterior donde se puede visualizar para qué frecuencias se alcanzan los máximos de amplitud para las distintas masas.

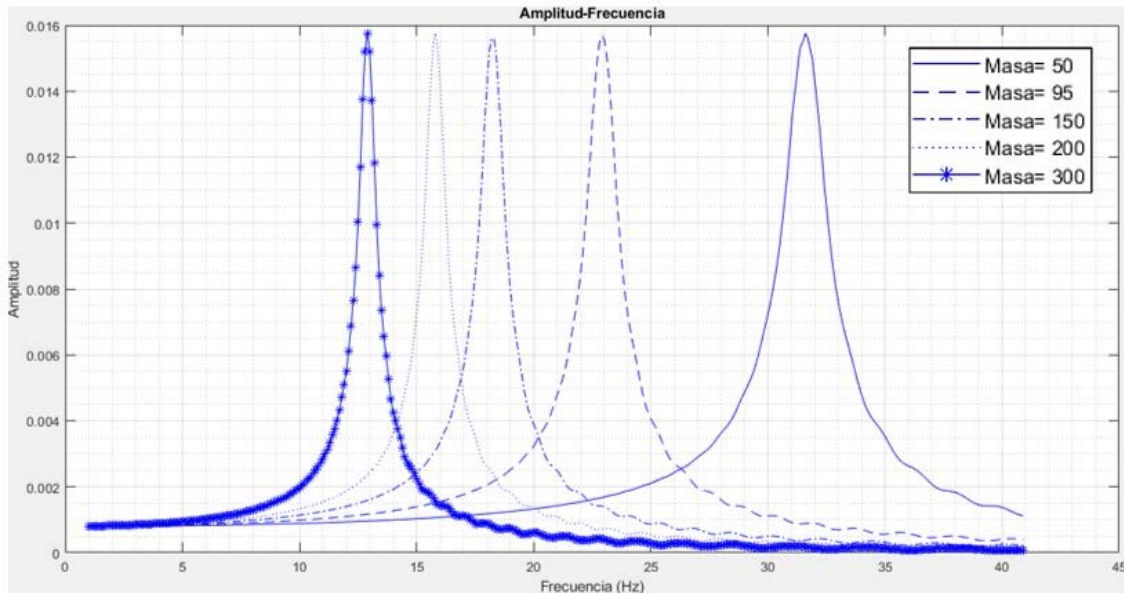


Figura 4. Función de respuesta en frecuencia para distintos valores de la masa

Tabla 2. Amplitudes máximas y frecuencias correspondientes para las distintas masas

<i>Masa (t)</i>	<i>Amplitud Máx.(m)</i>	<i>Frecuencia (Hz)</i>
50	0,01575	31,6
95	0,01571	22,9
150	0,01561	18,3
200	0,01575	15,8
300	0,01576	12,9

Se puede afirmar que no existe influencia de la masa en la amplitud de la respuesta, pero sí tiene influencia en la frecuencia natural. Cuanto mayor sea la masa, menor es la frecuencia, es decir, para que un sistema con una masa elevada entre en resonancia, la sollicitación debe tener un periodo elevado, y viceversa.

3.1.2. Influencia del amortiguamiento

Siguiendo el mismo procedimiento, se mantienen constantes todos los parámetros a excepción del amortiguamiento (ξ). Los parámetros usados se resumen en la tabla 3.

Tabla 3. Parámetros para el análisis de la influencia del amortiguamiento

m (t)	k (kN/m)	A (kN)	w_f (Hz)
95	50'000	20	20

Ejecutando el código se obtiene la función de respuesta en frecuencia para los distintos valores de ξ (figura 5). En la tabla 4 se muestran, para cada coeficiente de amortiguamiento, la mayor amplitud obtenida y su frecuencia correspondiente.

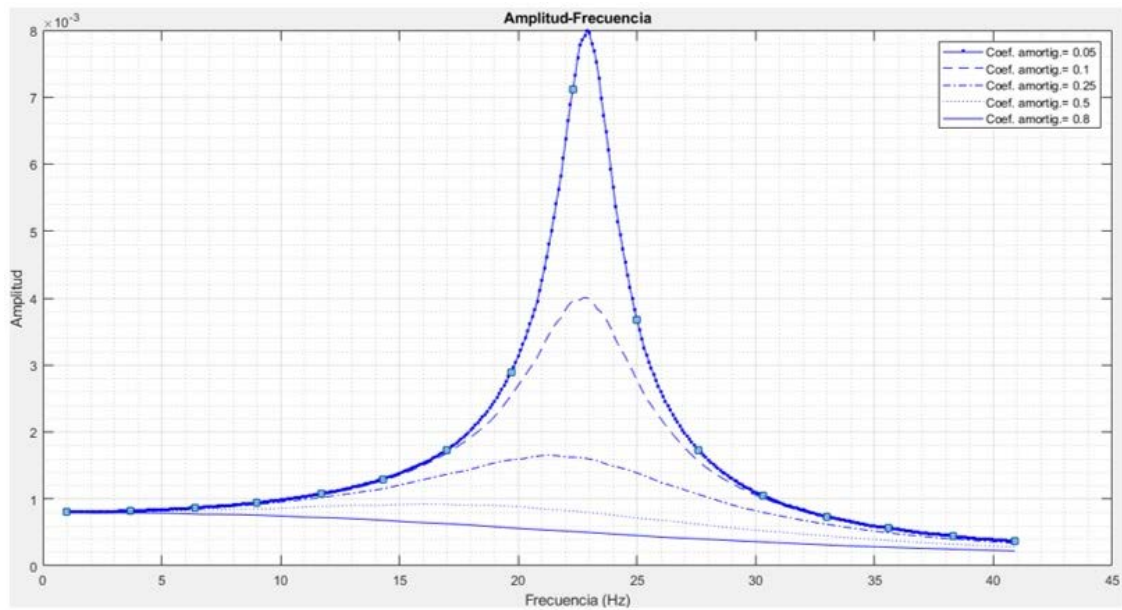


Figura 5. Curvas amplitud-frecuencia según distintos valores de ξ

Tabla 4. Amplitudes máximas y frecuencias correspondientes para los valores de ξ

ξ	<i>Amplitud máx. (m)</i>	<i>Frecuencia (Hz)</i>
0,05	0,007999	22,9
0,1	0,003970	22,6
0,25	0,001651	21,2
0,5	0,0009236	16,1
0,8	0,0007594	9,0

Las curvas son cualitativamente distintas si se varía el valor del amortiguamiento que, a diferencia de lo que ocurría con la masa, influye tanto en la amplitud como en la frecuencia natural. Cuanto menor sea ξ mayores serán la amplificación dinámica y la frecuencia, el sistema será cada vez menos amortiguado. Si, por el contrario, ξ toma valores cercanos a la unidad, el sistema tiene cada vez menor amplitud y frecuencia natural.

3.1.3. Influencia de la rigidez

De forma similar, al variar la rigidez manteniendo constantes los restantes parámetros, como se muestra en la tabla 5.

Tabla 5. Parámetros para análisis de influencia de la rigidez

<i>m (t)</i>	ξ	<i>A (kN)</i>	<i>w_f (Hz)</i>
95	0,025	20	20

Si se visualiza la función de respuesta en frecuencia para los distintos valores de rigidez, se obtienen las curvas que se muestra en la figura 6. En la tabla 6 se expone la mayor

amplitud obtenida y su frecuencia correspondiente para cada valor de rigidez.

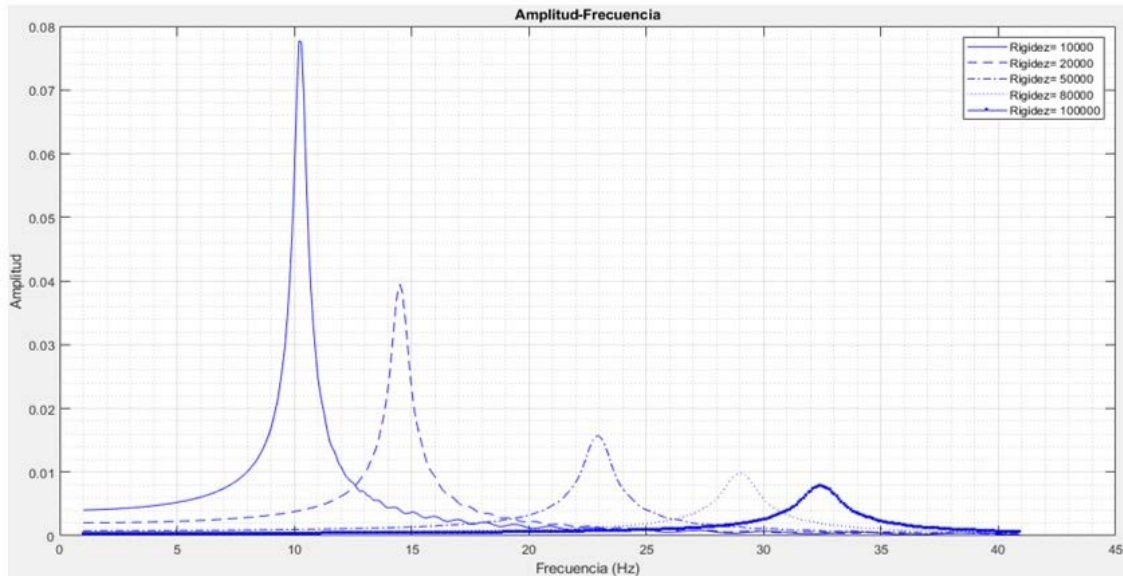


Figura 6. Función de respuesta en frecuencia para distintos valores de rigidez

Tabla 6. Amplitudes máximas y frecuencias correspondientes para los valores de rigidez

Rigidez (kN/m)	Amplitud máx. (m)	Frecuencia (Hz)
10'000	0,07774	10,2
20'000	0,03946	14,5
50'000	0,01571	22,9
80'000	0,009844	29,0
100'000	0,007865	32,4

Para la rigidez la relación es clara, cuando se aumenta la rigidez disminuye la amplitud de la vibración en régimen permanente, a la vez que aumenta la frecuencia natural.

3.2 Sistema de dos grados de libertad

3.2.1. Gráficas de posición-tiempo

Se estudia las gráficas posición-tiempo para los dos grados de libertad, pero antes se debe tener en cuenta que, en el caso de dos grados de libertad, se tienen dos amortiguamientos relativos:

$$\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1w_{01}} \quad (8)$$

$$\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2w_{02}} \quad (9)$$

En este caso se considerarán siempre constantes los valores asociados al primer grado de libertad ya que son los parámetros de una estructura que es invariable. Es por ello que para analizar cómo varían los resultados en función del amortiguamiento, sólo se tomará como variable el asociado al segundo grado de libertad, es decir, ξ_2 . A continuación, se obtendrán las curvas posición-tiempo para ambos grados de libertad, dando al amortiguamiento tres valores distintos ($\xi_2(\%)=7,5; 20; 80$). Se tomará el valor del amortiguamiento habitual en estructuras que es de $\xi_1=0,025$. El resto de los parámetros utilizados se muestran en la tabla 7.

Tabla 7. Parámetros para el análisis de gráficas posición-tiempo en función de ξ_2

m_1 (t)	m_2 (t)	k_1 (kN/m)	k_2 (kN/m)	ξ_1	A (kN)	w_f (Hz)
95	9,5	50'000	4'400	0,025	20	20

La masa del TMD (m_2) se estima según los criterios de (Den, 1956) y (Chen y Huang, 2004) que plantean que existe una relación de masa entre la estructura y el sistema amortiguador sintonizado. Para que los TMD tengan aplicabilidad y funcionalidad, el valor de μ debe estar en un intervalo de valores entre 0,01 y 0,15, o sea, la relación debe estar en el orden del 1 al 15 %. La razón de masa adoptada en este trabajo fue del 10 %, que se encuentra en el rango recomendado por estos autores:

$$\mu = \frac{m}{M} \tag{10}$$

siendo: m - masa del sistema amortiguador (t) y M - masa de la estructura (t).

$$m = \mu M = 0,1 * 95 t = 9,5 t ; \text{ Por tanto, } m_2=9,5 t.$$

La rigidez del TMD (k_2) se estima asumiendo que su frecuencia natural sea aproximadamente igual que la del sistema principal (22 Hz).

$$w_0^2 = \frac{k_2}{m_2} \tag{11}$$

siendo: $w_0 = 21,5\text{Hz}$; y $m_2 = 9,5 t$.

$$k_2 = w_0^2 * m_2 = 21,5^2 * 9,5 = 4392 \frac{kN}{m} \text{ se asume } k_2 = 4'400 \frac{kN}{m}$$

$$\text{Comprobación: } w_0 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{4400}{9,5}} = 21,5\text{Hz}$$

Las curvas de posición-tiempo resultantes para cada gdl aparecen en las figuras 7, 8 y 9.

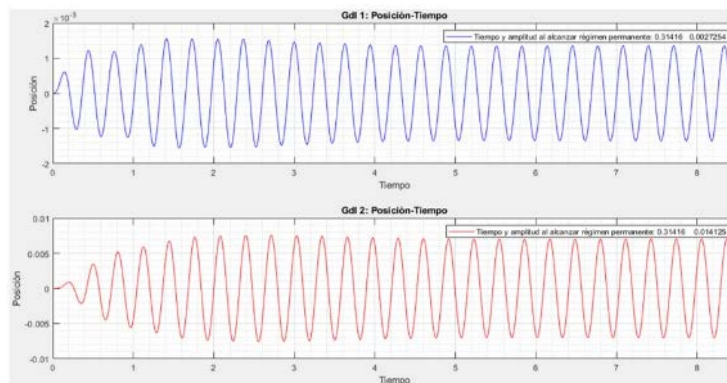


Figura 7. Gráfica de posición-tiempo de cada grado de libertad ($\xi_2=7,5 \%$)

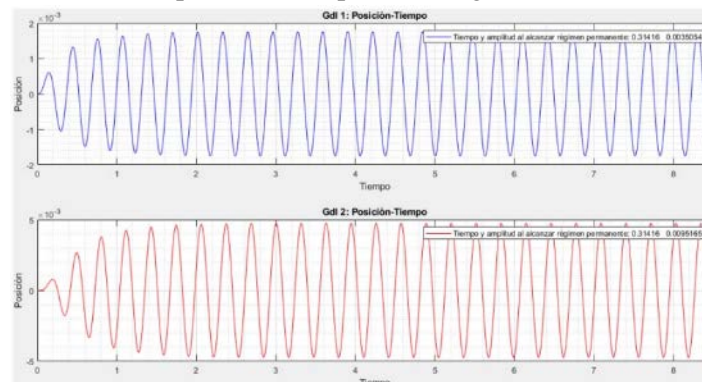


Figura 8. Gráfica de posición-tiempo de cada grado de libertad ($\xi_2=20 \%$)

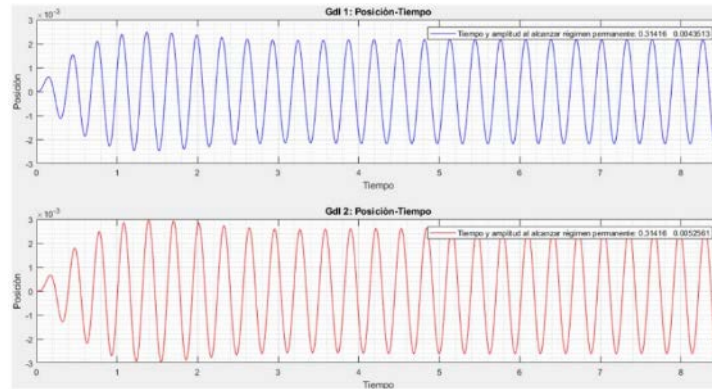


Figura 9. Gráfica de posición-tiempo de cada grado de libertad ($\xi_2=80\%$)

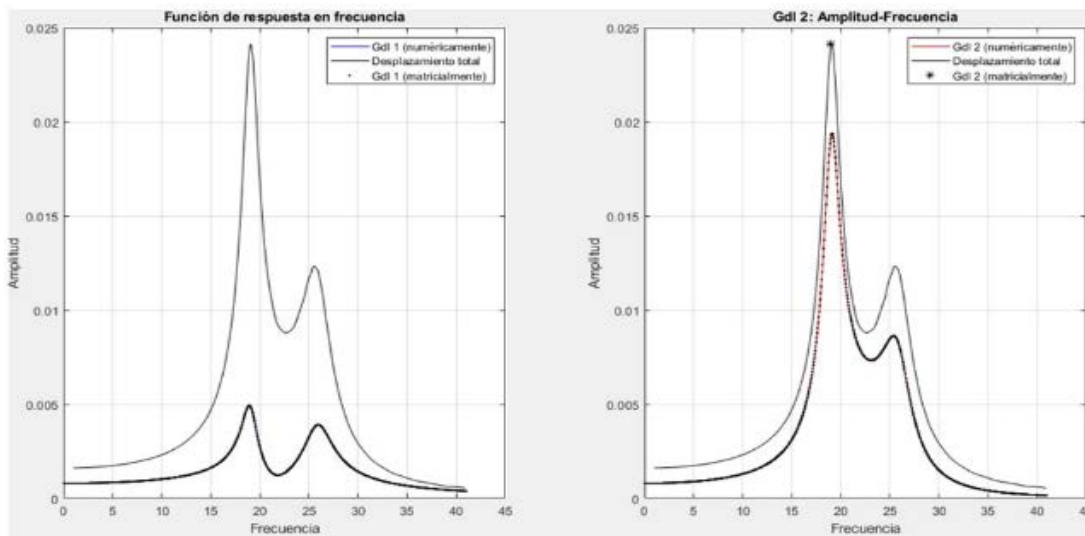
3.2.2. Función de Respuesta en Frecuencia (FRF)

Desarrollando el mismo código, se pueden obtener las gráficas de amplitud-frecuencia. En este caso, cada grado de libertad tiene asociada una frecuencia de resonancia, por lo que, al combinarlos, se obtiene gráficas con dos picos. El gráfico para el problema se obtiene con las variables que aparecen en la tabla 8.

Tabla 8. Parámetros para análisis de la función de respuesta en frecuencia

$m_1(t)$	$m_2(t)$	$k_1(kN/m)$	$k_2(kN/m)$	ξ_1	ξ_2	$A(kN)$	$\omega_f(Hz)$
95	9,5	50'000	4'400	0,025	0,075	20	20

Las funciones de respuesta en frecuencia para cada gdl aparecen en la figura 10.



a) Grado de libertad 1

b) Grado de libertad 2

Figura 10. Curvas amplitud-frecuencia

Aunque usualmente la curva que interesa es la definida como sistema completo, se ha representado por duplicado para que sea visible el aporte de cada grado de libertad al sistema. Como se había anticipado, se trata de una curva con dos máximos claros. Esto es debido a que cada grado de libertad, si se considera por separado, tiene una frecuencia de resonancia asociada que, en este caso, al tener unos valores de amortiguamiento muy bajos, prácticamente coincide con la frecuencia natural. Al unir los dos grados, la gráfica del conjunto que se obtiene es una mezcla de la de cada grado.

En el ejemplo analizado se puede hacer un cálculo sencillo para verificar la hipótesis explicada, partiendo de las definiciones de frecuencia natural (ecuación (11)):

$$w_0^2 = \frac{k}{m} \rightarrow w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \rightarrow w_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{5e4}{95}} = 22\text{Hz} \rightarrow w_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \sqrt{\frac{4400}{9,5}} = 21,5\text{Hz}$$

En el sistema de dos grados de libertad, la tabla 9 resume los valores obtenidos respecto al tiempo que demora en alcanzar el régimen permanente y la amplitud en el mismo.

Tabla 9. Comparación de los resultados para tres valores de ξ_2

	$\xi_2=7,5 \%$		$\xi_2=20\%$		$\xi_2=80 \%$	
	<i>gdl 1</i>	<i>gdl 2</i>	<i>gdl 1</i>	<i>gdl 2</i>	<i>gdl 1</i>	<i>gdl 2</i>
Tiempo	0,31416	0,31416	0,31416	0,31416	0,31416	0,31416
Amplitud	0,0027254	0,014125	0,0035054	0,0095165	0,0043513	0,0052561

A partir de las gráficas 7, 8 y 9, se puede describir lo que ocurre al aumentar el valor de ξ_2 :

- Para ambos grados de libertad, con estos valores de masa, rigidez, amortiguamiento y amplitud de la fuerza de excitación, el sistema alcanza el régimen permanente rápidamente y cada grado de libertad lo hace prácticamente al mismo tiempo.
- La amplitud en el segundo grado de libertad tiende a disminuir, mientras que la del primer grado de libertad aumenta. Esto es debido a que, para bajos amortiguamientos, el grado de libertad dos vibra ampliamente absorbiendo parte de la energía que llega al gdl 1. Si el amortiguamiento es alto, ese gdl 2 no está disipando la energía mediante vibraciones, lo que se traduce en mayores amplitudes en el primer grado de libertad.

En las gráficas de FRF (figura 10) se aprecia que la máxima amplitud de cada grado de libertad aparece aproximadamente para la frecuencia natural correspondiente. No es exactamente igual porque hay un cierto grado de amortiguamiento y los elementos que componen la estructura no son independientes, existe cierto acoplamiento entre ellos.

4. CONCLUSIONES

1. Se desarrolla un modelo numérico donde se obtiene la influencia de la masa, la rigidez y el amortiguamiento en la respuesta dinámica del sistema, de este estudio se observan los siguientes resultados:

- La masa no influye en la amplitud de la respuesta dinámica del sistema. Cuanto menor sea el coeficiente de amortiguamiento de una estructura mayor será la amplitud de sus oscilaciones. La influencia de la rigidez es clara, mientras menor sea la rigidez de un sistema mayor será la amplitud de sus oscilaciones.
- Para valores elevados de masa y amortiguamiento de una estructura, menor frecuencia natural tiene; entonces para que un sistema con estos parámetros elevados entre en resonancia, la fuerza de excitación debe tener un período alto.

2. Al resolver el modelo de dos grados de libertad, variando solamente el coeficiente de amortiguamiento del TMD (ξ_2) y obteniendo las gráficas de posición-tiempo, se puede arribar a las siguientes conclusiones:

- Para cualquier valor de ξ_2 se comprueba que el segundo grado de libertad (TMD) vibra ampliamente absorbiendo parte de la energía que llega a la estructura.
 - Para cualquiera de los grados de libertad (puente o TMD), con estos valores de masa, rigidez, amortiguamiento y amplitud de la fuerza de excitación, el sistema alcanza el régimen permanente rápidamente y cada grado de libertad lo hace prácticamente al mismo tiempo.
3. En las funciones de respuesta en frecuencia, se comprueba que el sistema alcanza su mayor amplificación dinámica cuando la frecuencia de la vibración producida por una carga externa coincide con la frecuencia natural de la estructura.

REFERENCIAS

- Bian, Y., Liu, X., Sun, Y., & Zhong, Y., Optimized design of a tuned mass damper inerter (tmdi) applied to circular section members of transmission towers., *Buildings*, Vol. 12, No. 8, 2022, 1154. <https://doi.org/10.3390/buildings12081154>
- Chagoyen, C.A., Medina, G., Campos, Y.S., Chagoyen, E.L., y Álvarez, C., Estudio de los componentes de un Amortiguador de Masa Sintonizado., *Memorias del Simposio Internacional de Construcciones, III Convención Científica Internacional, UCLV, Santa Clara, Cuba, noviembre 2021.*
- Chen, Y.H., & Huang, Y.H., Timoshenko beam with tuned mass dampers and its design curves., *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 278, No. 4, 2004, pp. 873-888. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2003.10.013>
- Den, P.J., *Mechanical Vibrations.*, 4th Edition, McGraw-Hill, New York, 1956, pp. 346-370.
- Duménigo, A.C., Identificación de sistemas estructurales basado en vibraciones. Aplicación a Casos de Estudio., Tesis presentada en opción al Grado científico de Máster en la Especialidad de Estructuras en la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, Cuba, 2018.
- Falconí, R.A., *Dinámica de Estructuras con CEINCI-LAB.*, 2da Edición, Sección Nacional del Ecuador del IPGH, 2012, Quito, Ecuador, pp. 165-199. <https://www.ipgh.gob.ec/portal/index.php/biblioteca-menu/novedades-bibliograficas/416-dinamica-de-estructuras-con-ceinci-lab>
- Frahm, H., Device for Damping Vibration of Bodies., United State Patent, 989,958, 1911.
- Hajji, F.E.A., Análisis y simulación numérica para el diseño de un sistema amortiguador de vibraciones., Tesis presentada en opción al título de Ingeniero Civil en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de la Universidad de Sevilla, 2016.
- Jones, D.I.G., Response and damping of a simple beam with tuned dampers., *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 42, No. 1, 1967, pp. 50-53. https://pubs.aip.org/jasa/article-pdf/42/1/50/11647441/50_1_online.pdf
- Junfeng, L., Ji, Y., Kun, H., Qing, Z., & Li Z., Analysis of a nonlinear tuned mass damper by using the multi-scale method., *Journal of Theoretical and Applied Mechanics.*, Vol. 60, No. 3, 2022, pp. 463-477, <https://doi.org/10.15632/jtam-pl/151012>
- Li, C., & Cao, L., Active tuned tandem mass dampers for seismic structures., *Earthquakes and Structures*, Vol. 17, No. 2, 2019, pp.143-162.
-

<https://doi.org/10.12989/eas.2019.17.2.143>

Martínez-Martínez, G.D.J., Blandón-Valencia, J.J., y Lara-Valencia, L.A., Amortiguadores de masa sintonizada: una revisión general., Revista Politécnica., Vol. 18 No. 3, 2022, pp.140-168. <https://doi.org/10.33571/rpolitec.v18n35a10>

Mazzon, L., Frappa, G., & Pauletta, M., Effectiveness of Tuned Mass Damper in Reducing Damage Caused by Strong Earthquake in a Medium-Rise Building., Applied Sciences, Vol. 13, No. 11, 2023, pp. 6815-6839. <https://doi.org/10.3390/app13116815>

Padrón, H., Empleo de amortiguadores de masa sintonizada en la atenuación de vibraciones estructurales., Tesis presentada en opción al Grado de Máster en Estructuras en la Universidad Central “Marta Abreu” de Las Villas, Cuba, 2021.

Roobahan, M., & Turan, G., An improved passive tuned mass damper assisted by dual stiffness., Structures, Vol. 50, 2023, pp. 1598-1607. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2023.02.125>

CONFLICTO DE INTERÉS

Los autores declaran que no existen conflictos de interés.

CONTRIBUCIONES DE LOS AUTORES

- Dr.C. César A. Chagoyen Méndez. Conceptualización, investigación, metodología, supervisión, redacción - primera redacción.
 - Ing. Giovanni Medina Castellón. Investigación, redacción - revisión y edición, validación, software.
 - Dr.C. Yamill S. Campos Pérez. Validación, software.
 - Dr.C. Ernesto L. Chagoyen Méndez. Investigación, supervisión.
 - Dr.C. Ángel S. Machado Rodríguez. Redacción - revisión y edición.
 - Dr.C. Gilberto García del Pino. Redacción - revisión y edición.
-