

# DETERMINACIÓN DEL FACTOR DE FORMA PARA ENGRANAJES DE DIENTES RECTOS ASIMÉTRICOS

**Jorge L. Moya Rodríguez\***,  
Facultad de Ingeniería Mecánica, UCLV;  
**José Alberto Velázquez Pérez**,  
Universidad Veracruzana, Xalapa, México;  
**Rafael Goytisoló Espinosa**,  
Universidad "Carlos Rafael Rodríguez" de Cienfuegos, Cuba.

Recibido: Junio/2005

Aceptado: Septiembre/2005

En los engranajes metálicos bien lubricados la falla esencial es la picadura o pitting del flanco del diente, teniendo la fatiga volumétrica un peso secundario. Sin embargo, en los engranajes plásticos de dientes rectos la falla esencial es la fractura del diente. En esta falla intervienen de manera decisiva las tensiones que se originan en el pie del diente, la concentración de dichas tensiones y la geometría del diente. Dentro de los factores geométricos, además del ancho del diente y la altura, juega un papel importante el factor de Lewis, el cual interviene directamente en la expresión de cálculo a la resistencia del diente. Una variante para aumentar la resistencia a la fractura del diente es construirlo de forma asimétrica. Sin embargo, no existen en la literatura los valores del factor de forma para dientes asimétricos. En el presente trabajo se hace un análisis teórico del procedimiento para la determinación del factor de forma en dientes asimétricos y se ofrecen los valores de este parámetro en función de la simetría y del número de dientes.

Palabras clave: Engranajes, Lewis, plásticos.

## ***DETERMINATION OF FORM FACTOR FOR SPUR GEARS WITH ASYMMETRIC TEETH***

Pitting is the main failure in well lubricated metallic gears, having fractures under bending stress a second role. However in plastic gears mostly occurs fracture at the tooth root and contact stresses play no part. In these fractures intervene in a decisive way the originated stresses at the tooth root, the stress concentration and the tooth geometry. Among the geometric factors, besides the tooth width and the tooth height, form factor plays an important role. This factor intervenes directly in mathematical formulae for calculating bending stresses at tooth root. At the present time are used spur gears with asymmetric teeth in order to increase bending fatigue strength; however there are not yet appropriate values of form factor for these types of teeth. A theoretical analysis of the procedure for the determination of the form factor in spur gears with asymmetric teeth is made at this paper. For factor values for asymmetric teeth according to asymmetry and number of teeth are offered.

Key words: Gears, Lewis, plastics.

---

(\*) E-mail: [jorgemr@fim.uclv.edu.cu](mailto:jorgemr@fim.uclv.edu.cu)

## INTRODUCCIÓN

Un aspecto importante dentro de la geometría de los engranes es el factor de Lewis, el cual es decisivo para el cálculo a la flexión de los mismos.<sup>9</sup> La mayoría de los textos tradicionales de engranajes abordan ecuaciones, gráficos y tablas para calcular el factor de Lewis<sup>2, 3,6,7,8,10,11,13,14,15</sup>. Sin embargo, no existen en las referencias anteriores valores para engranajes asimétricos. Para utilizar cualesquiera de las expresiones tradicionales de cálculo de la resistencia de los dientes de los engranajes plásticos asimétricos es imprescindible conocer el factor de Lewis para este tipo de engranajes. Por lo reciente de este tipo de engranajes no existen estos datos en la literatura.

### Determinación del factor de Lewis en engranajes simétricos

Para engranajes simétricos este parámetro se calcula a través de diferentes procedimientos. Según Black<sup>1</sup> para calcular ese factor se parte de la parábola inscrita en el diente, como se muestra en la figura 1. A partir de esta figura establece que el factor de Lewis se determina por la expresión:

$$y = \frac{t^2}{6 \cdot h \cdot p}$$

t y h están acotados en la figura y p es el “diámetro pitch”.

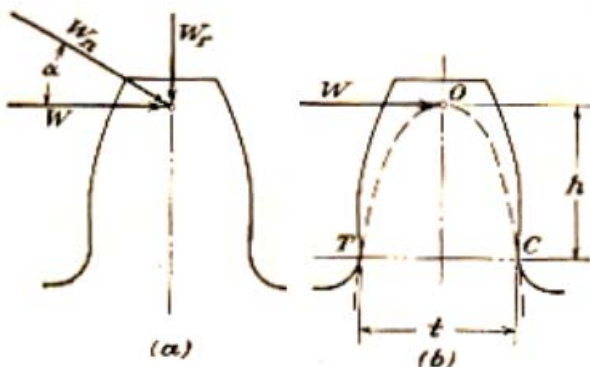


Figura 1. Cálculo del factor de Lewis según Black

Este propio autor también establece otro procedimiento geométrico para determinar el factor de Lewis, construyendo el diente a escala y realizando determinadas suposiciones geométricas.

Faires<sup>4</sup> propone el procedimiento ilustrado en la figura 2.

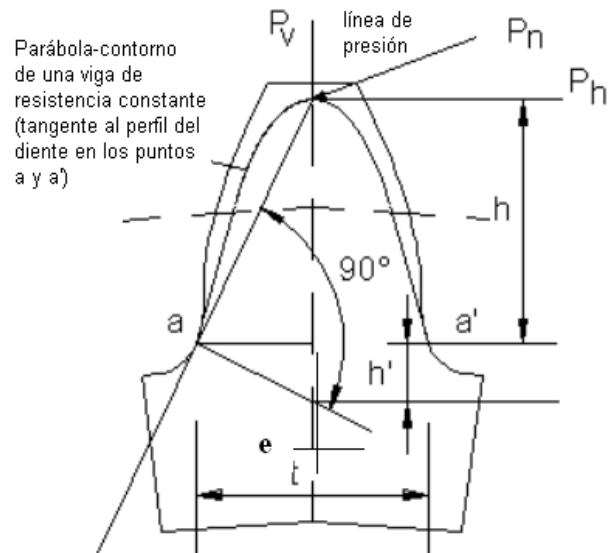


Figura 2. Determinación del factor de Lewis para engranajes simétricos

De la figura puede deducirse que:

$$h = \frac{t^2}{4 \cdot h'}$$

$$y = \sigma = \frac{3 \cdot P_k}{2 \cdot b \cdot h'}$$

al término  $\frac{2 \cdot h'}{3}$

se le denomina factor de forma ( $Y_F$ ).

Otras normas, como la norma DIN (12), establecen la sección más crítica del espesor tirando una línea a 30°.

### Determinación del factor de Lewis en engranajes asimétricos

Para determinar la expresión para el cálculo del factor de forma se desarrolló el esquema de la figura 3.

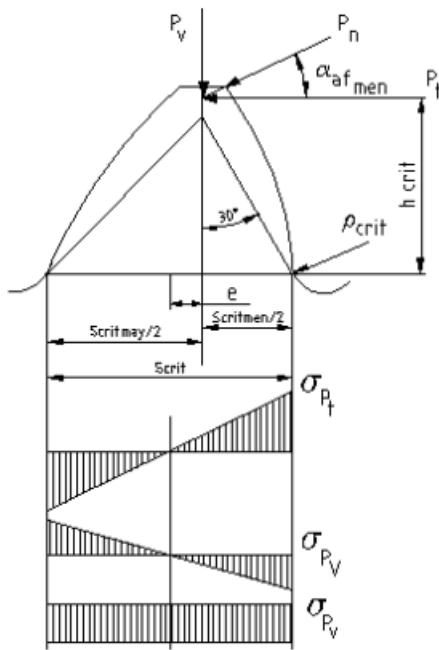


Figura 3. En torno a la determinación del Factor de Lewis en engranajes asimétricos

La tensión que se produce en el pie del diente debido a la flexión se puede calcular según la expresión siguiente:

$$\sigma = \frac{M_f}{W_x} = \frac{(P_n \cdot \cos \alpha_{afmen} \cdot h_{crit} - P_v \cdot e)}{W_x} \quad (1)$$

$$\sigma = \frac{(P_n \cdot \cos \alpha_{afmen} \cdot h_{crit} - P_n \cdot \sin \alpha_{afmen} \cdot e)}{W_x}$$

Pero:

$$W_x = \frac{b \cdot S_{crit}^2}{6}$$

Entonces:

$$\sigma = \frac{P_n (h_{crit} \cdot \cos \alpha_{afmen} - e \cdot \sin \alpha_{afmen})}{\frac{b \cdot S_{crit}^2}{6}}$$

Pero:

$$P_n = \frac{P_t}{\cos \alpha_{cmen}}$$

De donde:

$$\sigma = \frac{P_t}{b} \left[ \frac{6 \cdot (h_{crit} \cdot \cos \alpha_{afmen} - e \cdot \sin \alpha_{afmen})}{S_{crit}^2 \cdot \cos \alpha_{cmen}} \right]$$

Multiplicando y dividiendo por el módulo:

$$\sigma = \frac{P_t}{b \cdot m} \left[ \frac{6 \cdot \left( \frac{h_{crit} \cdot \cos \alpha_{afmen}}{m} - \frac{e \cdot \sin \alpha_{afmen}}{m} \right)}{\left( \frac{S_{crit}^2}{m^2} \right) \cdot \cos \alpha_{cmen}} \right] \quad (2)$$

Llamando al factor de forma  $Y_F$  a:

$$Y_F = \left[ \frac{\left( \frac{S_{crit}^2}{m^2} \right) \cdot \cos \alpha_{cmen}}{6 \cdot \left( \frac{h_{crit} \cdot \cos \alpha_{afmen}}{m} - \frac{e \cdot \sin \alpha_{afmen}}{m} \right)} \right] \quad (3)$$

Se tiene entonces la expresión para el cálculo de las tensiones en el pie del diente para engranajes con dientes asimétricos:

$$\sigma = \frac{P_t}{b \cdot m \cdot Y_F} \quad (4)$$

Esta es la archiconocida expresión de Lewis, sólo que en este caso este factor hay que calcularlo por la expresión 3.

Obsérvese la diferencia de esta expresión con la expresión para dientes simétricos que aparece en los textos:

$$Y_F = \left[ \frac{\left( \frac{S_{crit}^2}{m^2} \right) \cdot \cos \alpha_{cmen}}{6 \cdot \left( \frac{h_{crit} \cdot \cos \alpha_{afmen}}{m} \right)} \right] \quad (5)$$

Como  $h_{crit}$ ,  $e$  y  $S_{crit}$  dependen del módulo, el valor de  $Y_F$  será independiente de este parámetro.

En las expresiones anteriores:

Mf – Momento flector producido por la componente horizontal de la fuerza transmitida

$W_x$  – Módulo de la sección

$P_t$  – Fuerza Tangencial

$P_n$  – Fuerza normal resultante en el diente

$P_v$  – Fuerza Vertical

$h_{crit}$  – Altura crítica de aplicación de la carga donde la Tensión es máxima

$S_{crit}$  – Espesor del diente para el cual la Tensión es máxima

$e$  – Excentricidad

$\alpha_{afmen}$  - ángulo de aplicación de la fuerza normal  
 - ángulo del perfil por la cara de menor ángulo

m – módulo

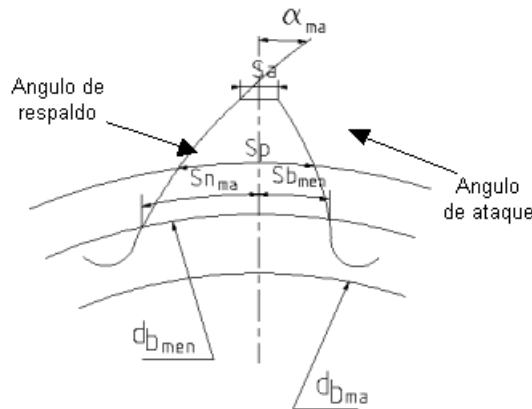
$Y_F$  – Factor de Lewis o factor de forma

desarrolló un nuevo algoritmo para calcular  $Y_F$ .

Para tener en cuenta la asimetría se introdujo el concepto de coeficiente de asimetría, que no es más que la relación entre el ángulo del perfil en la zona de respaldo, dividido entre el ángulo de ataque, es decir:

Teniendo en cuenta lo establecido por la norma DIN (12) y el Algoritmo propuesto por el Dr. Gonzalo González<sup>5</sup> así como las características particulares de los dientes asimétricos, se

$$C = \frac{\alpha_{res}}{\alpha_{at}} \quad (\text{ver figura 4})$$



**Figura 4. Diente asimétrico mostrando el ángulo del perfil de ataque y el ángulo del perfil de respaldo**

Con el algoritmo desarrollado se programaron todas las expresiones que intervienen en el mismo en Visual Basic 5.0 y se obtuvieron los valores del factor de Lewis ( $Y_F$ ) para todos los números de dientes y coeficientes de asimetría posibles.

En la figura 5 se muestra cómo varía el factor de forma para diferentes números de dientes y coeficientes de asimetría. En la Tabla 1 se muestran los valores del factor de forma para diferentes números de dientes y coeficientes de simetría.

**Figura 5. Variación del Factor de forma de acuerdo al número de dientes y el coeficiente de asimetría**

Tabla 1. Valores del factor de forma para dientes asimétricos

C	Valores del factor de forma de acuerdo al número de dientes Z y al coeficiente de asimetría (C.)											
	Z=10	Z=12	Z=15	Z=20	Z=30	Z=40	Z=50	Z=60	Z=70	Z=80	Z=90	Z=100
1	0,201	0,245	0,289	0,32	0,358	0,389	0,408	0,421	0,429	0,429	0,442	0,446
1,05	0,228	0,267	0,308	0,351	0,392	0,396	0,415	0,435	0,437	0,438	0,45	0,454
1,1	0,232	0,272	0,314	0,354	0,399	0,403	0,422	0,442	0,444	0,445	0,458	0,462
1,15	0,242	0,277	0,32	0,358	0,406	0,41	0,43	0,45	0,452	0,453	0,466	0,47
1,2	0,237	0,282	0,326	0,371	0,413	0,417	0,438	0,458	0,46	0,461	0,474	0,478
1,25	0,247	0,288	0,332	0,378	0,421	0,424	0,446	0,466	0,468	0,469	0,482	0,487
1,3	0,252	0,294	0,339	0,385	0,429	0,432	0,454	0,475	0,477	0,478	0,49	0,496
1,35	0,257	0,3	0,345	0,392	0,437	0,44	0,463	0,483	0,486	0,487	0,498	0,505
1,4	0,263	0,306	0,352	0,4	0,445	0,448	0,472	0,492	0,495	0,496	0,51	0,515
1,45	0,268	0,312	0,359	0,408	0,454	0,457	0,481	0,502	0,504	0,505	0,52	0,525
1,5	0,274	0,319	0,366	0,416	0,463	0,466	0,491	0,512	0,514	0,515	0,53	0,535

Otra vía para poder hallar los valores del factor de Lewis para dientes asimétricos es construyendo a escala los mismos. Para comparar los resultados fue necesario construir geoméricamente las diferentes asimetrías de los dientes y tener en cuenta los números de dientes que pueden alcanzar las ruedas, según se muestra en la figura 6.

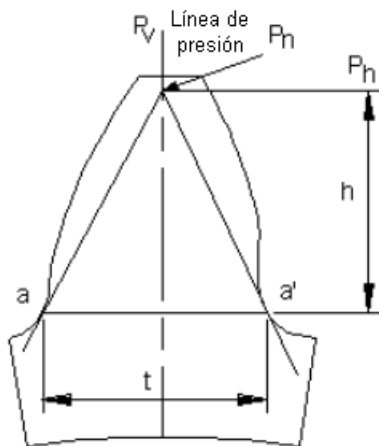


Figura 6. Determinación gráfica del factor de forma para dientes asimétricos

Para facilitar el trabajo utilizando el Software Stat Graphics Plus 4.1, se hallaron las ecuaciones de regresión para obtener los valores del factor de forma para dientes asimétricos en función del número de dientes y el coeficiente de asimetría. Para precisar más en el valor de este factor, se establecieron tres expresiones de acuerdo al rango de número de dientes.

Para 10 d" Z d" 35 (con un 98,9 % de confianza y un error absoluto de 0,0053)  
 $y = -0,0315949 + 0,0269414.Z + 0,405287.C - 0,000462649.Z^2 - 0,103118.C^2$

Para 40 d" Z d" 70 (con un 99,13 % de confianza y un error absoluto de 0,00058)

$$y = -0,0543935 + 0,011263.Z + 0,0685655.C - 0,0000845454.Z^2 + 0,0404041.C^2$$

Para 75 d" Z d" 100 (con un 99,13 % de confianza y un error absoluto de 0,00058)

$$y = -0,0599137 + 0,00834091.Z + 0,028519.C - 0,0000413636.Z^2 + 0,0581197.C^2$$

Para validar y comparar los resultados se usaron diferentes coeficientes de asimetría y números de dientes y se calcularon los valores del factor de forma a través del método gráfico por la expresión

$$Y_F = \frac{t^2}{6h}$$

por el algoritmo y programa desarrollado y por las expresiones obtenidas a través del proceso de regresión. En la Tabla 2 se muestra una comparación entre los valores del factor de forma calculados por la expresión 3 y el algoritmo y programa desarrollado ( $Y_{Fr}$  en la tabla), por los dibujos realizados ( $Y_{Fd}$ ) y por las ecuaciones de regresión obtenidas del Stat Graphics ( $Y_{Fsg}$  en la tabla)

**Tabla 2. Valores del coeficiente de Lewis en dientes asimétricos por diferentes métodos**

y	Z=30			Z=40			Z=50			Z=90		
	$C_1$	$C_1^{35}$	$C_1^6$	$C_1$	$C_1^{35}$	$C_1^6$	$C_1$	$C_1^{35}$	$C_1^6$	$C_1$	$C_1^{35}$	$C_1^6$
$Y_{Fr}$	0,358	0,437	0,463	0,389	0,446	0,471	0,408	0,463	0,491	0,442	0,498	0,53
$Y_{Fsq}$	0,378	0,435	0,451	0,37	0,427	0,454	0,406	0,463	0,491	0,445	0,503	0,532
$Y_{Fd}$	0,345	0,403	0,434	0,35	0,413	0,423	0,397	0,428	0,489	0,432	0,468	0,512

### CONCLUSIONES

1. La falla principal de los engranajes plásticos es la fractura del diente; de hecho todas las expresiones de cálculo que aparecen en la literatura para el diseño de este tipo de engranajes se limitan a determinar las tensiones que se originan en el pie del diente debido a la flexión.
2. Las diferentes expresiones de cálculo existentes para determinar las dimensiones de los engranajes plásticos en función de la sollicitación de potencia no tienen en cuenta las posibilidades de modificaciones geométricas de estos engranajes ni las particularidades del factor de Lewis para los mismos, el cual –en los engranajes asimétricos– depende además del número de dientes del ángulo de ataque y del ángulo de respaldo.
3. Existe una buena concordancia entre los valores del factor de forma para dientes asimétricos obtenidos por los diferentes métodos. Hay que destacar que los valores obtenidos a través del método gráfico, como es lógico, serán algo menores que los valores de YF calculados por la expresión 3 y por las ecuaciones de regresión, ya que no tienen en cuenta el efecto de la disminución de la tensión en el pie del diente debido a la componente vertical de la fuerza y a la excentricidad.

### BIBLIOGRAFÍA

1. Black, Paul: *Machine Design*, Editorial Mc Graw Hill, New York, 1948.
2. Buckingham, E.: *Manual of Gear Design*. Editorial Industrial Press Inc., New York, 1971.
3. Dudley, D. W.: *Manual de Engranajes: Diseño, Manufactura y Aplicación de Engranajes*, Editora Continental S.A., México, 1980.
4. Faires, V. M.: *Diseño de elementos de máquinas*, Editorial Limusa, 1998.
5. González Rey, G.; P. Frechilla Fernández y R. García Martín: “El método de elementos finitos como alternativa en el cálculo de engranajes”. *Revista Ingeniería Mecánica*, no. 1, ISPJAE, Ciudad de La Habana, Cuba, 2001.
6. Henriot, G.: *Manual Práctico de Engranajes*. Editorial Marcombo, Barcelona, 1977.
7. \_\_\_\_\_: *Traité Théorique et Pratique des Engrenajes*. Villars, Paris, 1991.
8. Kudriatzev, V. N.: *Elementos Máquinas*. Editorial Mashinostroenie, Leningrado, 1980.
9. Lewis, W.: *Investigation of Strenght of Gear teeth*. *Proceedings of Engineers Club*. Philadelphia, P. A., pp. 16-23, 1892.
10. Litvin F. L.: *Teoría de los engranajes*, Editorial Nauka, Moscú, 1968.
11. Merrit, H.: *Gear Engineering*, Pitman Publishing, England, 1990.
12. Norma DIN 3990: Teil 3. Tragfähigkeitsberechnung von Stirnräden–Deutch Verlag GMBH, Berling, 1987.
13. Reshetov, D.: *Elementos de Máquinas*, Editorial Pueblo y Educación, La Habana, 1985.
14. Spotts, M. F. y T. E. Shoup: *Elementos de máquinas*, Editorial Prentice Hall, México, 1999.

15. Zirk, K.: Zahnrad. Veb Fachbuch Verlag,  
Leipzig, 1980.